Ueber die zahlentheoretische Funktion ... (n)
und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz
by Landau, E.
in: Nachrichten von der Gesellschaft der
Wissenschaften zu Göttingen,
Mathematisch-Physikalische Kl...
Göttingen; 1895, 1933

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library
For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.
Contact:
Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Ueber die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz.

Von

E. Landau in Berlin.

Vorgelegt von D. Hilbert durch den vorsitzenden Secretar in der Sitzung am 3. Februar 1900.

§ 1.

Die Richtigkeit des Goldbachschen Satzes, daß sich jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen darstellen lasse [1]), ist durch Herrn Stäckels [2]) Untersuchungen sehr wahrscheinlich geworden.

Da die Primzahlmenge des Intervalles 1, 2, . . n mit einem im Verhältnis zum wahren Werte für große n verschwindend kleinen Fehler $\frac{n}{\log n}$ ist [3]), so lautet Herrn Stäckels [4]) Näherungsformel $\mathfrak{G}_n$ für die Anzahl G_n der Zerlegungen der geraden Zahl n in die Summe zweier Primzahlen (wobei $p+q$ und $q+p$ als zwei verschiedene Zerlegungen zählen),

$$\mathfrak{G}_n = \frac{n^2}{\log^2 n\, \varphi(n)}, \tag{1}$$

ein Ausdruck, der trotz seiner Schwankungen mit n ins Unendliche

---

1) Briefe Goldbachs und Eulers vom 7. und 30. Juni 1742, Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième siècle, B. 1, Petersburg 1843, S. 127 und 135.

2) „Ueber Goldbachs empirisches Theorem: Jede grade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden“, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1896, S. 292—299.

3) v. Mangoldt, „Ueber eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. 119, 1898, S. 65—71.

4) l. c., S. 298.

wächst. Dabei bedeutet $\varphi(n)$ die zahlentheoretische Function, welche angiebt, wie viele der Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

zu n teilerfremd sind.

Im Folgenden soll zunächst eine die Goldbachschen Zahlen betreffende asymptotische Aufgabe behandelt werden; die Lösung derselben Aufgabe unter Zugrundelegung nicht der wahren Werte der Goldbachschen Zahlen, sondern der Näherungswerte (1) wird zu einer Verification der Resultate führen, zu denen Herr Stäckel gelangt ist.

§ 2.

Mit Hilfe des von den Herren Hadamard[1]) und de la Vallée-Poussin[2]) bewiesenen Satzes, daß die Summe der Logarithmen der Primzahlen $\leqq x$ asymptotisch gleich x ist, das heißt, daß der Quotient durch x sich für $x = \infty$ der Grenze 1 nähert, läßt sich der asymptotische Wert der summatorischen Function[3])

$$H(x) = \sum_{n=1}^{x} G_n$$

folgendermaßen bestimmen.

$H(x)$ ist die Anzahl aller Primzahlpaare p, q, für welche

$$p + q \leqq x$$

ist; dies ergiebt

$$H(x) = \sum_{p \leqq x} \pi(x-p),$$

wenn $\pi(x)$ die Primzahlmenge des Intervalles $1, 2, \ldots x$ bezeichnet. Die Summe ist über alle Primzahlen $\leqq x$ zu erstrecken.

In einer jüngst erschienenen Arbeit des Verfassers[4]) ist aus dem erwähnten Primzahlsatze die Folgerung gezogen: „Wenn $F(\nu, x)$ eine Function zweier positiver Argumente ist, welche den Bedingungen genügt:

---

1) „Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques", Bulletin de la société mathématique de France, t. 24, 1896, S. 199—220.

2) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", Annales de la société scientifique de Bruxelles, t. 20, 2e partie, 1896.

3) Im Folgenden wird die obere Summationsgrenze nirgends als ganzzahlig vorausgesetzt; der Summationsbuchstabe hat hier also alle ganzzahligen Werte $\leqq x$, d. h. die Werte $1, 2, \ldots [x]$ zu durchlaufen.

4) „Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers", Bulletin de la société mathématique de France, t. 28, 1900, S. 25—38.

1) $F(\nu, x) \geqq 0$ für $1 \leqq \nu \leqq x$,

2) $\dfrac{F(\nu, x)}{\log \nu} \geqq \dfrac{F(\nu', x)}{\log \nu'}$ für $2 \leqq \nu \leqq \nu' \leqq x$,

3) Bei constantem ν ist

$$F(\nu, x) = \left\{\int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du\right\},$$

(das heißt, der Quotient von $F(\nu, x)$ durch den Wert des Integrales nähert sich für $x = \infty$ der Grenze 0), so ist die über alle Primzahlen $\leqq x$ erstreckte Summe

$$\sum_{p \leqq x} F(p, x) \sim \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du$$

(das heißt, beide Functionen sind asymptotisch gleich)."

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind im vorliegenden Falle für

$$F(\nu, x) = \pi(x - \nu)$$

erfüllt; also ist

$$H(x) \sim \int_2^x \frac{\pi(x-u)}{\log u}\, du = \int_2^{x-2} \frac{\pi(x-u)}{\log u}\, du,$$

da für $u > x - 2$

$$\pi(x - u) = 0$$

ist. Durch Betrachtungen, welche den beim Beweise des erwähnten Hilfssatzes angestellten analog sind, ergiebt sich, daß diese asymptotische Gleichung auch bestehen bleibt, wenn $\pi(x-u)$ durch $\dfrac{x-u}{\log(x-u)}$ ersetzt wird. Demnach ist

$$H(x) \sim \int_2^{x-2} \frac{x-u}{\log u \log(x-u)}\, du$$

$$= \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{x-u}{\log u \log(x-u)}\, du + \int_{\frac{x}{2}}^{x-2} \frac{x-u}{\log u \log(x-u)}\, du.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite geht durch die Substitution $x - u = v$ in

$$\int_2^{\frac{x}{2}} \frac{v}{\log(x-v) \log v}\, dv = \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{u}{\log u \log(x-u)}\, du$$

über; also ist

$$H(x) \sim x \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{du}{\log u \, \log(x-u)} = x \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{du}{\log u \, (\log x + \log(1-\frac{u}{x}))}$$

$$= x \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{du}{\log u \, (\log x - \frac{2\vartheta u}{x})} \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1),$$

also wenn $O\,(F(x))$ eine Function bezeichnet, deren Quotient durch $F(x)$ für große x nicht beliebig großer Werte fähig ist:

$$H(x) \sim \frac{x}{\log x} \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{du}{\log u} + O \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{u\,du}{\log u \log^2 x}$$

$$= \frac{x^2}{2 \log^2 x} + O\left(\frac{x^2}{\log^3 x}\right),$$

$$H(x) = \sum_{n=1}^{x} G_n \sim \frac{x^2}{2 \log^2 x}. \tag{2}$$

§ 3.

Zum Vergleiche mit diesem streng bewiesenen Satze soll nunmehr der asymptotische Wert der entsprechenden Summe $\sum\limits_{n=1}^{x} \mathfrak{G}_n$ berechnet werden, wo für gerades n $\mathfrak{G}_n$ den von Herrn Stäckel angegebenen Näherungswert (1) der Goldbachschen Zahl G_n bezeichnet. Die ungeraden n können ganz außer Betracht gelassen werden, da eine ungerade Zahl n auf eine Weise als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann, wenn $n-2$ eine Primzahl ist, sonst auf keine Weise, so daß

$$\sum_{n=1,3,5\,..}^{x} G_n \sim \frac{x}{\log x} = \left\{\frac{x^2}{\log^2 x}\right\},$$

$$\sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} G_{2n} = \sum_{n=1}^{x} G_n - \sum_{n=1,3,5\,..}^{x} G_n = H(x) - \left\{\frac{x^2}{\log^2 x}\right\} \sim \frac{x^2}{2 \log^2 x}$$

ist. Es handelt sich also um die Summe

$$\sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} \mathfrak{G}_{2n} = \sum_{n=2,4,6\,..}^{x} \frac{n^2}{\log^2 n \, \varphi(n)},$$

für die ebenfalls ein asymptotischer Wert hergeleitet werden soll. Zu diesem Zwecke wird es erforderlich sein, die Summe

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)}$$

für große Werte des Argumentes zu untersuchen.

Summen, in denen die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ auftritt, sind schon wiederholt behandelt worden. Schon Dirichlet hat den mittleren Wert von $\varphi(n)$ bestimmt [1]). Unter Benutzung des Umstandes, daß die summatorische Function

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{x} \varphi(n)$$

der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{x} \Phi\left[\frac{x}{k}\right] = \tfrac{1}{2}([x]^2 + [x])$$

genügt, fand er, daß

$$\Phi(x) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x^\alpha)$$

ist, wo α eine zwischen 1 und 2 gelegene Zahl bezeichnet. Später hat Herr Mertens [2]) den Nachweis geführt, daß

$$(3) \qquad \Phi(x) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \log x)$$

ist, und endlich zog Herr Cesàro [3]) Folgerungen über die asymptotischen Werte von Summen

$$\sum_{n=1}^{x} \varphi(n)\, G(n)$$

wo $G(n)$ eine mit n monoton veränderliche Function bedeutet. Dagegen ist meines Wissens für die Summe $\Psi(x)$ noch kein asymptotischer Wert ermittelt worden [4]). Die im Folgenden angewandte Methode gestattet es, die Annäherung weiter zu treiben, als es für den vorliegenden Zweck nötig ist, und da der Gegenstand an sich ein Interesse hat, soll die genauere Formel entwickelt werden.

Als Grundlage der Untersuchung dient der bekannte Ausdruck von $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = n \prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

wo p alle Primfactoren von n durchläuft. Es ist also

---

1) „Ueber die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie", Abhandlungen der Berliner Akademie, 1849, S. 69—83, Werke, Band 2, S. 49—66.

2) „Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. 77, 1874, S. 291.

3) Cesàro, „Sur les fondements du calcul asymptotique", Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, Paris, B. 106, 1888, S. 1651—1654.

4) Die Betrachtungen am Schlusse der 16. Note in Herrn Cesàros Abhandlung „Sur diverses questions d'arithmétique" (Mémoires de la société royale des sciences de Liège, 2e série, t. 10, 1883, S. 169—170) haben keine Beziehung zu dieser Frage.

$$\frac{1}{\varphi(n)}=\frac{1}{n\prod\limits_p\left(1-\frac{1}{p}\right)}=\frac{1}{n}\prod_p\frac{p}{p-1}=\frac{1}{n}\prod_p\left(1+\frac{1}{p-1}\right)=\frac{1}{n}\sum_l\frac{1}{\varphi(l)},$$

wo l alle Teiler von n durchläuft, welche durch kein von 1 verschiedenes Quadrat teilbar sind; in der That kommt jedes Glied

$$\frac{1}{\varphi(l)}=\frac{1}{\varphi(p_1p_2\ldots p_\varrho)}=\frac{1}{\varphi(p_1)\ldots\varphi(p_\varrho)}=\frac{1}{(p_1-1)\ldots(p_\varrho-1)}$$

einmal und nur einmal in dem auf alle Primfactoren von n erstreckten Produkte $\prod\limits_p\left(1+\frac{1}{p-1}\right)$ vor, wenn man die Multiplication ausführt. Also ist

$$\Psi(x)=\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{\varphi(n)}=\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}\sum_l\frac{1}{\varphi(l)}.$$

Kehrt man die Summationsfolge um, so hat l alle quadratfreien Zahlen $\leqq x$ zu durchlaufen; eine solche Summe soll stets durch $\sum'$ bezeichnet werden; n kann jedem unterhalb x gelegenen Vielfachen von l gleich sein. Es ergiebt sich somit

$$\Psi(x)=\sum_{l=1}^{x}{}'\frac{1}{\varphi(l)}\sum_{lm\leqq x}\frac{1}{lm}=\sum_{l=1}^{x}{}'\frac{1}{l\varphi(l)}\sum_{m=1}^{\frac{x}{l}}\frac{1}{m}.$$

Nun ist, wenn C die Eulersche Constante bezeichnet,

$$\sum_{m=1}^{\frac{x}{l}}\frac{1}{m}=\log x-\log l+C\pm 2\vartheta\frac{l}{x}\quad(0\leqq\vartheta\leqq 1);$$

daraus folgt

$$\Psi(x)=\sum_{l=1}^{x}{}'\frac{1}{l\varphi(l)}(\log x-\log l+C)+O\sum_{l=1}^{x}{}'\frac{1}{l\varphi(l)}\frac{l}{x},$$

$$\Psi(x)=(\log x+C)\sum_{l=1}^{x}{}'\frac{1}{l\varphi(l)}-\sum_{l=1}^{x}{}'\frac{\log l}{l\varphi(l)}+\frac{1}{x}O\sum_{l=1}^{x}{}'\frac{1}{\varphi(l)}.\tag{4}$$

Die beiden Reihen $\sum\limits_{l=1}^{\infty}{}'\frac{1}{l\varphi(l)}$ und $\sum\limits_{l=1}^{\infty}{}'\frac{\log l}{l\varphi(l)}$ convergieren; es ist

$$\sum_{l=1}^{\infty}{}'\frac{1}{l\varphi(l)}=\left(1+\frac{1}{2\varphi(2)}\right)\left(1+\frac{1}{3\varphi(3)}\right)\left(1+\frac{1}{5\varphi(5)}\right)\cdots=\prod_p\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right),$$

wo p alle Primzahlen durchläuft, also

$$=\prod_p\frac{p^2-p+1}{p(p-1)}=\prod_p\frac{p^3+1}{(p+1)p(p-1)}=\prod_p\frac{p^6-1}{(p^3-1)(p^2-1)p}$$

$$=\prod_p\frac{1-\frac{1}{p^6}}{\left(1-\frac{1}{p^3}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}=\frac{\frac{1}{6}\pi^2\zeta(3)}{\frac{1}{945}\pi^6}$$

(5) $$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l\varphi(l)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4};$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{\log l}{l\varphi(l)} = \sum_p \log p \sum_l{}' \frac{1}{l\varphi(l)}$$

wo l alle quadratfreien Vielfachen von p durchläuft, also

$$= \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} \sum_m{}' \frac{1}{m\varphi(m)},$$

wo m alle quadratfreien, nicht durch p teilbaren Werte annimmt. Offenbar ist

$$\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right) \sum_m{}' \frac{1}{m\varphi(m)} = \sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4};$$

dies ergiebt

(6) $$\sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{\log l}{l\varphi(l)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \sum_p \frac{\log p}{p^2-p+1}.$$

Da die Gleichung (4) in erster Annäherung lehrt, daß

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)} \sim \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \log x$$

ist, so ist a fortiori

(7) $$\sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(l)} \leqq \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)} = O(\log x).$$

Dies folgt auch daraus, daß

$$\sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(l)} \leqq \prod_{p \leqq x}\left(1+\frac{1}{p-1}\right) = \frac{1}{\prod\limits_{p \leqq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

ist, ein Ausdruck, der bekanntlich die Größenordnung $\log x$ hat.

Aus der alleinigen Thatsache, daß

$$\Psi(x) = O\,(\log x)$$

ist, folgt

$$\sum_{l=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} < \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{1}{n\varphi(n)} = O\left(\frac{\log x}{x}\right) = \left\{\frac{1}{\log x}\right\};$$

in zweiter Annäherung lehrt also (4), daß

$$\Psi(x) = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \log x + \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4}\left(C - \sum_p \frac{\log p}{p^2-p+1}\right) + \delta(x)$$

ist, wo

$$\lim_{x=\infty} \delta(x) = 0.$$

Mit Benutzung des soeben gefundenen Resultates

$$\Psi(x) = \alpha \log x + O(1),$$

wo α eine Constante ist, ergiebt sich weiter

$$\sum_{l=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} < \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{1}{n\varphi(n)} = \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\Psi(n)-\Psi(n-1)}{n}$$

$$= \sum_{n=x+1}^{\infty} \Psi(n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) - \frac{\Psi(x)}{x+1}$$

$$= \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\alpha \log n}{n(n+1)} + O\sum_{n=x+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) - \frac{\alpha\log x}{x+1} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \alpha\int_x^{\infty} \frac{\log x}{x^2}dx - \frac{\alpha\log x}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{\log x}{x}+\frac{1}{x}\right) - \frac{\alpha\log x}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{(8)} \qquad \sum_{l=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} = O\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\sum_{l=x+1}^{\infty}{}' \frac{\log l}{l\varphi(l)} < \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\log n}{n\varphi(n)} = \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\log n}{n}(\Psi(n)-\Psi(n-1))$$

$$= \sum_{n=x+1}^{\infty} \Psi(n)\left(\frac{\log n}{n}-\frac{\log(n+1)}{n+1}\right) - \frac{\Psi(x)\log(x+1)}{x+1}$$

$$= \sum_{n=x+1}^{\infty}\left(-n\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right)+\log n\right)\frac{\Psi(n)}{n(n+1)} - \frac{\alpha\log^2 x}{x} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

$$= \alpha\int_x^{\infty}\frac{\log^2 x}{x^2}dx - \frac{\alpha\log^2 x}{x} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{\log^2 x}{x} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)\right) - \frac{\alpha\log^2 x}{x} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

$$\text{(9)} \qquad \sum_{l=x+1}^{\infty}{}' \frac{\log l}{l\varphi(l)} = O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

Als Schlußresultat ergiebt sich also aus den Gleichungen (4) bis (9):

$$\text{(10)} \quad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4}\left(\log x + C - \sum_p \frac{\log p}{p^2-p+1}\right) + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

§ 4.

Sind $\Psi_1(x)$ und $\Psi_2(x)$ die auf alle ungeraden bezw. geraden Zahlen des Intervalles 1, 2, . . x erstreckten Summen $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$, so ist

$$\Psi_1(x) + \Psi_2(x) = \Psi(x);$$

der in § 3 dargelegte Gedankengang führt, indem man alle vorkommenden Summen auf ungerade Argumente beschränkt, zu der Gleichung

$$\Psi_1(x) = \frac{105\,\zeta(3)}{2\pi^4}\log x + \gamma + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

wo γ eine Constante ist, auf deren Wert es für den gegenwärtigen Zweck nicht ankommt. Daraus folgt

$$(11)\qquad \Psi_2(x) = \Psi(x) - \Psi_1(x) = \frac{105\,\zeta(3)}{\pi^4}\log x + c + O\left(\frac{\log x}{x}\right);$$

c bezeichnet eine Constante.

Folglich ist

$$\sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} \mathfrak{G}_{2n} = \sum_{n=2,4,6..}^{x} \frac{n^2}{\log^2 n\,\varphi(n)} = \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu^2}{\log^2\nu}\left(\Psi_2(\nu) - \Psi_2(\nu-1)\right)$$

$$= \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu^2}{\log^2\nu}\,\frac{105\,\zeta(3)}{\pi^4}\log\frac{\nu}{\nu-1} + \sum_{\nu=2}^{x} O\left(\frac{\log\nu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu^2}{\log^2\nu} - \frac{(\nu+1)^2}{\log^2(\nu+1)}\right)$$

$$+ O\left(\frac{\log x}{x}\,\frac{(x+1)^2}{\log^2(x+1)}\right)$$

$$= \frac{105\,\zeta(3)}{\pi^4}\sum_{\nu=2}^{x}\frac{\nu}{\log^2\nu} + O\int_2^x\frac{dx}{\log^2 x} + O\int_2^x\frac{\log x}{x}\,\frac{x}{\log^2 x}\,dx + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

$$= \frac{105\,\zeta(3)}{\pi^4}\int_2^x\frac{x\,dx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

$$(12)\qquad \sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} \mathfrak{G}_{2n} \sim \frac{105\,\zeta(3)}{2\pi^4}\,\frac{x^2}{\log^2 x}.$$

Der wahre Wert $\sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} G_{2n}$ ist, wie oben gefunden wurde, $\sim\frac{1}{2}\frac{x^2}{\log^2 x}$. *Von Herrn Stäckels Näherungsformel ausgehend gelangt man also nicht nur zu der richtigen Größenordnung der summatorischen Function, sondern die Constante, mit welcher* $\frac{x^2}{\log^2 x}$ *multipliziert ist, ist auch ungefähr gleich dem wahren Werte* $\frac{1}{2}$, *da*

$$\frac{105\,\zeta(3)}{2\pi^4} = 0{,}648..$$

ist. Also

$$(13)\qquad \sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} (\mathfrak{G}_{2n} - G_{2n}) \sim 0{,}148..\,\frac{x^2}{\log^2 x}.$$

Ueber den bei Anwendung der Näherungsformel (1) für G_n selbst begangenen Fehler kann man hieraus keinen Aufschluß erhalten, da in der Summe (13) die positiven und negativen Fehler sich aufheben; man ersieht jedoch, daß die Summe der positiven Fehler die Summe der negativen Fehler übertrifft, sogar um soviel, daß die algebraische Summe sämtlicher Fehler von derselben Größenordnung ist als die Summe der wahren Werte. Daß die Formel (1) zu große Werte liefert, ist Herrn Stäckel nicht entgangen; er hat deshalb noch eine zweite Näherungsformel[1]) angegeben, welche aber asymptotisch dieselbe summatorische Function ergiebt.

Wenn aus den asymptotischen Resultaten der vorliegenden Arbeit eine Folgerung auf die Werte der Goldbachschen Zahlen G_{2n} selbst gezogen werden kann, so würde es die sein, daß es sich vielleicht empfiehlt, Herrn Stäckels Näherungsformel mit der Constanten $\frac{\pi^4}{105\,\zeta(3)} = 0{,}772\ldots$ zu multiplizieren. Dann ist die summatorische Function asymptotisch gleich der summatorischen Function der Goldbachschen Zahlen; die algebraische Summe der Fehler ist alsdann von geringerer Größenordnung als die Summe der wahren Werte.

1) l. c., S. 298.