Über eine neue Weise bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Vorgelegt von Herrn Landau in der Sitzung vom 3. März 1917.

1. Ist $f(t)$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar und wird die Summation über alle Primzahlen p erstreckt, die $\leqq x$ sind, so ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \sum_{p \leqq x} f\left(\frac{p}{x}\right) = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Ich will im folgenden diesen Satz, bezw. zwei allgemeinere und schärfere Sätze beweisen, um dann zu zeigen, wie sich mit deren Hilfe manche zahlentheoretische Grenzwerte in aller Kürze berechnen lassen.

Der Ausgangspunkt meiner Untersuchung war ein Satz von Herrn Landau[1]), mit dessen Erörterung ich beginnen will. Herr Landau betrachtet eine Folge $q_1, q_2, q_3, \ldots$, deren Anwachsen in den wesentlichsten Zügen mit dem Anwachsen der Primzahlfolge 2, 3, 5, 7, 11, ... übereinstimmt. Genauer gesprochen, betrachtet er eine nicht abnehmende, divergente Folge von positiven Zahlen

$$0 < q_1 \leqq q_2 \leqq q_3 \leqq \cdots, \qquad \lim_{n=\infty} q_n = \overline{\overline{\infty}},$$

und die zugeordnete Funktion $\varkappa(x)$, wo $\varkappa(x)$ die Anzahl derjenigen q bedeutet, die $\leqq x$ sind. (D. h. für $q_m < q_{m+1}$, $q_m \leqq x < q_{m+1}$ ist

1) Landau, Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques, Bulletins de l'Académie royale de Belgique (Classe des Sciences) (1911) S. 443—472. Vgl. Théorème VII.

$\varkappa(x) = m$). Er setzt die Existenz einer positiven, nicht abnehmenden Funktion $w(x)$ von der Eigenschaft

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(2x)}{w(x)} = 1 \tag{1}$$

voraus, für welche

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varkappa(x)\,w(x)}{x} = 1 \tag{2}$$

ist.

Unter diesen Bedingungen beweist Herr Landau

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{\varkappa(x)} \sum_{q \leqq x} \left(\frac{x}{q} - \left[\frac{x}{q}\right]\right) = 1 - C.$$

$\left(\sum_{q \leqq x} \varphi(q)\right.$ bedeutet $\sum_{\nu=1}^{\varkappa(x)} \varphi(q_\nu)$, C die Eulersche Konstante.$\left.\right)$

Ich bemerke, daß die Funktion $f(t)$, die für $0 < t \leqq 1$ durch

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]$$

definiert wird (es sei $f(0)$ etwa $= 0$) im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar ist. Denn sie ist beschränkt und ihre Unstetigkeitspunkte haben den Punkt $t = 0$ zum einzigen Häufungspunkte. Es ist übrigens

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) dt &= \lim_{n=\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) dt \\
&= \lim_{n=\infty} \left\{\log n - 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - (n-1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right\} \\
&= \lim_{n=\infty} \left\{\log n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + 1\right\} \\
&= 1 - C.
\end{aligned}$$

Diese Bemerkung zeigt, daß der zitierte Satz von Herrn Landau[1]) als Spezialfall enthalten ist im folgenden

1) Zur Zeit der Abfassung vorliegender Abhandlung war mir die Arbeit von Herrn Landau, Über einige neuere Grenzwertsätze, Rendiconti, Palermo, Bd. XXXIV (1912) leider noch nicht bekannt. Kombiniert man diese letztere mit seiner eben zitierten Arbeit, so erhält man Resultate, die teils mehr, teils weniger besagen, als der Satz I, und die übrigens, wie mir scheint, kürzer zu erhärten sind auf dem Wege, der hier zum Beweise des Satzes I eingeschlagen wird. (Anm. bei der Korrektur, 10. 5. 1917.)

Satz I. Die Funktion $f(t)$ sei im Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ eigentlich integrierbar im Sinne von Riemann. Genügt die Folge $q_1, q_2, q_3, \ldots$ den vorhin genannten Landauschen Bedingungen, so ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Der Beweis von Satz I ist überaus einfach. Ich schicke ihm nur die Bemerkung voraus, daß die Zahl 2 in der Bedingung (1) bloß der Einfachheit halber steht. Denn, da $w(x)$ positiv und nicht abnehmend ist, folgt aus (1)

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(\beta x)}{w(\alpha x)} = 1, \tag{3}$$

wenn α, β irgend zwei feste positive Zahlen. In der Tat, sei

$$0 < \alpha < \beta < \alpha 2^m,$$

wo m eine geeignet gewählte ganze Zahl, so ist

$$1 \leqq \frac{w(\beta x)}{w(\alpha x)} \leqq \frac{w(\alpha 2^m x)}{w(\alpha x)} = \frac{w(2\alpha x)}{w(\alpha x)} \frac{w(4\alpha x)}{w(2\alpha x)} \cdots \frac{w(2^m \alpha x)}{w(2^{m-1}\alpha x)},$$

und alle m Faktoren rechts streben gegen 1.

2. Ich nenne eine streckenweise konstante, im Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ definierte Funktion kurz „Treppenfunktion", wenn sie nur eine endliche Anzahl Unstetigkeitspunkte hat, denen $t = 0$ nicht angehört, und wenn sie auch in ihren Unstetigkeitspunkten von links stetig ist. Sind also $t_1, t_2, \ldots t_{m-1}$ die Unstetigkeitspunkte der Treppenfunktion $\Psi(t)$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1,$$

so ist

$$\Psi(t) = l_i \quad \text{für} \quad t_{i-1} < t \leqq t, \tag{4}$$

$\Psi(0) = l_1$, wo $l_1, l_2, l_3, \ldots l_m$ gewisse Konstanten sind. Es ist

$$\int_0^1 \Psi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) l_i. \tag{5}$$

Die Riemannsche Integrabilitätsbedingung läßt sich, die Erklärung von (5) vorausgesetzt, so fassen: Eine Funktion $f(t)$ ist dann und nur dann integrabel im eigentlichen Sinne, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Paar von Treppenfunktionen $\psi(t)$ und $\Psi(t)$ bestimmt werden kann, auf die Weise, daß

$$\psi(t) \leqq f(t) \leqq \Psi(t), \tag{6}$$

$$\int_0^1 \Psi(t)\,dt - \int_0^1 \psi(t)\,dt < \varepsilon. \tag{7}$$

Für die Treppenfunktion (4) ist der Satz I offenbar. Denn die Anzahl der q_ν, für welche

$$t_{i-1} < \frac{q_\nu}{x} \leqq t_i, \quad \Psi\left(\frac{q_\nu}{x}\right) = l_i, \quad xt_{i-1} < q_\nu \leqq xt_i,$$

ist $\varkappa(t_i x) - \varkappa(t_{i-1} x)$, also

$$\frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \Psi\left(\frac{q}{x}\right) = \frac{w(x)}{x} \sum_{i=1}^{m} l_i(\varkappa(xt_i) - \varkappa(xt_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} l_i\left(\frac{\varkappa(xt_i)\,w(xt_i)}{xt_i}\,\frac{w(x)}{w(xt_i)}\,t_i - \frac{\varkappa(xt_{i-1})\,w(xt_{i-1})}{xt_{i-1}}\,\frac{w(x)}{w(xt_{i-1})}\,t_{i-1}\right)$$

(für $i = 1$ fällt das zweite Glied in der Klammer weg), also nach (2), (3)

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \Psi\left(\frac{q}{x}\right) = \sum_{i=1}^{m} l_i(t_i - t_{i-1}) = \int_0^1 \Psi(t)\,dt.$$

Ist $f(t)$ irgend eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion, so bestimme man die zwei Treppenfunktionen $\psi(t)$ und $\Psi(t)$, die (6), (7) erfüllen. Dann ist

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \leqq \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \Psi\left(\frac{q}{x}\right)$$

$$= \int_0^1 \Psi(t)\,dt \leqq \int_0^1 f(t)\,dt + \varepsilon,$$

$$\underline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \geqq \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \psi\left(\frac{q}{x}\right)$$

$$= \int_0^1 \psi(t)\,dt \geqq \int_0^1 f(t)\,dt - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, ist Satz I bewiesen.

3. Daß $f(t)$ eigentlich integrierbar sei, ist keine unerläßliche Bedingung. Es ist z. B.

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} = \int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt = \frac{1}{\alpha},$$

wenn $0 < \alpha < 1$. Ich will dies zugleich mit einem allgemeineren Satze beweisen. —

Aus der Bedingung (1) folgt offenbar, daß $w(x)$ nur sehr langsam anwachsen kann. Ich will zeigen, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x^\alpha} = 0 \tag{8}$$

für beliebiges festes $\alpha > 0$. Ich setze

$$f(x) = \begin{cases} w(1) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ \dfrac{w(x)}{x^\alpha} & x \geqq 1. \end{cases}$$

Es ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{w(2x)}{2^\alpha w(x)} = \frac{1}{2^\alpha} < 1.$$

Man bestimme zu gegebenem Θ, $\frac{1}{2^\alpha} < \Theta < 1$, eine Zahl $a > 0$ derart, daß für $x > a$

$$\frac{f(x)}{f\left(\frac{x}{2}\right)} < \Theta.$$

Es sei A die obere Schranke von $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq a$.

Zu jedem gegebenen $x > a$ gehört eine ganze Zahl N, eindeutig bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{x}{2^{N-1}} > a \geqq \frac{x}{2^N}.$$

N wächst offenbar mit x ins Unendliche. Aus der Ungleichung

$$f(x) = \frac{f(x)}{f\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{f\left(\frac{x}{4}\right)} \cdots \frac{f\left(\frac{x}{2^{N-1}}\right)}{f\left(\frac{x}{2^N}\right)} f\left(\frac{x}{2^N}\right)$$
$$\leqq \Theta^N A$$

folgt nun die Behauptung (8).

Ich wende mich nun zur Abschätzung der Summe $\sum_{q \leqq x} q^{\alpha-1}$. Es seien $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r$ die verschiedenen Werte, die die ersten $\varkappa(x)$ Glieder der Folge $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$ annehmen. Es ist $r_1 = q_1$, $\varkappa(r_l) = \varkappa(x)$, und es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{q \leqq x} q^{\alpha-1} &= r_1^{\alpha-1}\varkappa(r_1) + r_2^{\alpha-1}(\varkappa(r_2)-\varkappa(r_1)) + \cdots + r_l^{\alpha-1}(\varkappa(r_l)-\varkappa(r_{l-1})) \\
&= \varkappa(r_1)(r_1^{\alpha-1}-r_2^{\alpha-1}) + \cdots + \varkappa(r_{l-1})(r_{l-1}^{\alpha-1}-r^{\alpha-1}) + \varkappa(r_l)(r_l^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}) \\
&\qquad + \varkappa(x)x^{\alpha-1} \\
&= -\varkappa(r_1)\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt^{\alpha-1}}{dt}\,dt - \cdots - \varkappa(r_l)\int_{r}^{x}\frac{dt^{\alpha-1}}{dt}\,dt + \varkappa(x)x^{\alpha-1} \qquad (9) \\
&= (1-\alpha)\int_{q_1}^{x}\varkappa(t)t^{\alpha-2}\,dt + \varkappa(x)x^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Zu jedem gegebenen ε

(10) $$0 < \varepsilon < 2^\alpha - 1$$

läßt sich ein Wert $a > 0$ so bestimmen, daß für $x > a$

$$\varkappa(x) < \frac{x}{w(x)}(1+\varepsilon), \qquad \frac{w(x)}{w\left(\frac{x}{2}\right)} < 1 + \varepsilon.$$

Es ist folglich für $x > a$

$$\begin{aligned}
\int_{q_1}^{x}\varkappa(t)t^{\alpha-2}\,dt &< \int_{q_1}^{a}\varkappa(t)t^{\alpha-2}\,dt + \int_{a}^{x}\frac{t}{w(t)}(1+\varepsilon)t^{\alpha-2}\,dt \\
&= A + (1+\varepsilon)\int_{a}^{x}\frac{t^{\alpha-1}}{w(t)}\,dt,
\end{aligned}$$

wo der Sinn der Abkürzung A ersichtlich ist. Es sei N die durch die Ungleichungen

$$\frac{x}{2^{N-1}} > a \geqq \frac{x}{2^N}$$

eindeutig bestimmte ganze Zahl. Dann folgt weiter

$$\begin{aligned}
\int_{q_1}^{x}\varkappa(t)t^{\alpha-2}\,dt &< A + (1+\varepsilon)\sum_{\nu=1}^{N}\int_{\frac{x}{2^\nu}}^{\frac{x}{2^{\nu-1}}}\frac{t^{\alpha-1}}{w(t)}\,dt \qquad (11) \\
&\leqq A + (1+\varepsilon)\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{w\left(\frac{x}{2^\nu}\right)}\left(\frac{x^\alpha}{2^{(\nu-1)\alpha}} - \frac{x^\alpha}{2^{\nu\alpha}}\right)\frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$= A + (1+\varepsilon)\frac{1}{\alpha}\frac{x^\alpha\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)}{w(x)}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{w(x)}{w\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{w\left(\frac{x}{2}\right)}{w\left(\frac{x}{4}\right)}\cdots\frac{w\left(\frac{x}{2^{\nu-1}}\right)}{w\left(\frac{x}{2^\nu}\right)}\frac{1}{2^{(\nu-1)\alpha}}$$

$$(11)\qquad < A + \frac{1+\varepsilon}{\alpha}\frac{x^\alpha\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)}{w(x)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1+\varepsilon)^\nu}{2^{(\nu-1)\alpha}}$$

$$= A + \frac{x^\alpha}{w(x)}\frac{1}{\alpha}\frac{\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)(1+\varepsilon)^2}{1-\frac{1+\varepsilon}{2^\alpha}}.$$

Aus (9) und (11)

$$\frac{w(x)}{x}\sum_{q\leqq x}\left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} = \frac{w(x)}{x^\alpha}\int_{q_1}^{x}(1-\alpha)\varkappa(t)t^{\alpha-2}dt + \frac{\varkappa(x)w(x)}{x}$$

$$< A(1-\alpha)\frac{w(x)}{x^\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)(1+\varepsilon)^2}{1-\frac{1+\varepsilon}{2^\alpha}} + \frac{\varkappa(x)w(x)}{x}.$$

Aus (2) und (8), und aus der Willkürlichkeit von ε, das bloß (10) genügen muß, folgt

$$(12)\qquad \overline{\lim_{x=\infty}}\,\frac{w(x)}{x}\sum_{q\leqq x}\left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} \leqq 0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} + 1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Jetzt bin ich in der Lage den Beweis zu liefern für den

Satz II. *Es sei $f(t)$ in jedem abgeschlossenen Teilintervalle vom Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$, das den Punkt $t = 0$ nicht enthält, eigentlich integrabel. Es existiere α, $0 < \alpha < 1$, so beschaffen, daß*

$$\lim_{t=0} f(t)\,t^{1-\alpha} = 0.$$

Dann ist

$$\lim_{x=\infty}\frac{w(x)}{x}\sum_{q\leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ sonst beliebig, nur so gewählt, daß für $0 < t \leqq \varepsilon$

$$f(t) < t^{\alpha-1}.$$

Ich definiere zwei eigentlich integrable Funktionen $f^*(t)$ und $\varphi(t)$ durch die Vorschrift

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t > \varepsilon \\ 0 & \text{für } 0 \leqq t \leqq \varepsilon \end{cases} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1} & \text{für } t > \varepsilon \\ 0 & \text{für } 0 \leqq t \leqq \varepsilon. \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) &= \sum_{q \leqq \varepsilon x} f\left(\frac{q}{x}\right) + \sum_{\varepsilon x < q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \\ &\leqq \sum_{q \leqq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} - \sum_{q \leqq x} \varphi\left(\frac{q}{x}\right) + \sum_{q \leqq x} f^*\left(\frac{q}{x}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \leqq \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} \\ - \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \varphi\left(\frac{q}{x}\right) + \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f^*\left(\frac{q}{x}\right) \\ \leqq \frac{1}{\alpha} - \int_0^1 \varphi(t)\,dt + \int_0^1 f^*(t)\,dt \\ = \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + \int_\varepsilon^1 f(t)\,dt,\end{aligned}$$

mit Benutzung des Satzes I und der Ungleichung (12). Daraus folgt weiter

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \leqq \int_0^1 f(t)\,dt,$$

und mit demselben Recht

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} -f\left(\frac{q}{x}\right) = -\underline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \leqq -\int_0^1 f(t)\,dt,$$

welche beide zusammen den vollen Satz II ergeben.

5. Verstehen wir unter $q_1, q_2, q_3, \ldots$ speziell die Folge der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ..., so wird $\varkappa(x) = \pi(x)$, d. h. die Anzahl der Primzahlen bis zur Grenze x und $w(x) = \log x$. Es ist nämlich, nach der einfachsten Fassung des Primzahlsatzes

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1. \tag{13}$$

Unter den Bedingungen des Satzes II ist also

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \sum_{p \leqq x} f\left(\frac{p}{x}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt. \tag{14}$$

Von der asymptotischen Primzahltheorie haben wir zum Beweise von (14) nur den Primzahlsatz (13) ohne spezielle Restabschätzung benutzt. Formel (14) gestattet nun eine Anzahl Folgerungen, die man aus dem Primzahlsatze zu ziehen pflegt oder ziehen kann, völlig durchsichtig und mühelos abzuleiten. Es handelt sich immer einfach darum, eine gewöhnliche Integralformel in einen zahlentheoretischen Grenzwertsatz gleichsam zu übersetzen. Ich gebe einige Beispiele und ich beginne mit den einfachsten und geläufigsten.

I) $$\int_0^1 \log t \, dt = -1$$

ergibt

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x}\Big(\sum_{p \leqq x} \log p - \pi(x)\log x\Big) = -1,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x}\sum_{p \leqq x} \log p = \lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1.$$

II) Für $a > -1$ ist

$$\int_0^1 t^a \, dt = \frac{1}{a+1},$$

folglich

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x^{1+a}} \sum_{p \leqq x} p^a = \frac{1}{a+1}.$$

III) Es ist

$$\int_0^1 \Big(\frac{1}{t} - \Big[\frac{1}{t}\Big]\Big) dt = 1 - C$$

(vgl. unter 1), das Integral im eigentlichen Sinne genommen. Daraus folgt

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \sum_{p \leqq x} \Big(\frac{x}{p} - \Big[\frac{x}{p}\Big]\Big) = 1 - C.$$

Dieses Resultat rührt von Herrn de la Vallée-Poussin[1]) her und gab Anstoß zu der Untersuchung von Herrn Landau, die ihrerseits die gegenwärtige Untersuchung angeregt hat.

---

1) de la Vallée-Poussin, Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Bd. 22, Teil 1, S. 84—90.

IV) Ich bezeichne mit $\sigma_a(n)$ die Summe der a-ten Potenzen aller verschiedener Primteiler der ganzen Zahl n. Es ist z. B.

$$\sigma_a(1) = 0, \quad \sigma_a(2) = 2^a, \quad \sigma_a(30) = 2^a + 3^a + 5^a.$$

Die Summe

$$\rho_a(1) + \sigma_a(2) + \sigma_a(3) + \cdots + \sigma_a(n) = \sum_{p \leqq n} \left[\frac{n}{p}\right] p^a$$

läßt sich für $a > 0$ mit Hülfe der Integralformel

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{t}\right] t^a \, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{a+1} \left(\frac{1}{\nu^{a+1}} - \frac{1}{(\nu+1)^{a+1}}\right) = \frac{\zeta(a+1)}{a+1}$$

asymptotisch auswerten. In der Tat, das Integral ist für $a \geqq 1$ eigentlich und genügt auch für $0 < a < 1$ den Bedingungen der Formel (14). Diese ergibt also für $a > 0$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_a(1) + \sigma_a(2) + \sigma_a(3) + \cdots + \sigma_a(n)}{n^{a+1} (\log n)^{-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{\log n}{n} \sum_{p \leqq n} \left[\frac{n}{p}\right] \left(\frac{p}{n}\right)^a$$
$$= \frac{\zeta(a+1)}{a+1}.$$

V) Zuletzt will ich noch die Verteilung der Reste studieren, die entstehen, wenn eine ganze Zahl n durch alle kleineren Primzahlen dividiert wird. Es sei α gegeben, $0 < \alpha > 1$, dann sind zwei Fälle möglich: der Rest der Division von n durch die Primzahl p ist entweder $< \alpha p$ oder er ist $\geqq \alpha p$ und $< p$. Im ersteren Falle ist

$$\frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right] < \alpha, \quad \left[\frac{n}{p}\right] > \frac{n}{p} - \alpha > \left[\frac{n}{p}\right] - 1, \quad \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha\right] = 1,$$

im zweiten Falle ist

$$\frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right] \geqq \alpha, \quad \left[\frac{n}{p}\right] \leqq \frac{n}{p} - \alpha < \frac{n}{p}, \quad \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha\right] = 0.$$

Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der fragliche Rest $< \alpha p$ ausfällt? Sie ist

$$= \frac{1}{\pi(n)} \sum_{p \leqq n} \left(\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha\right]\right),$$

da die Anzahl aller in Frage kommenden Primzahlen $\pi(n)$ ist.

Der Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit berechnet sich aus der Formel

$$\left(\int_0^1\left(\left[\frac{1}{t}\right]-\left[\frac{1}{t}-\alpha\right]\right)dt = 1-\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+\alpha}+\cdots\right.$$

$$= C+\frac{1}{\alpha}+\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

oder auch $= \left.\int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{1-t}dt\right)$. Das Integral ist nämlich eigentlich (die Unstetigkeitspunkte des beschränkten Integranden haben $t=0$ zur einzigen Häufungsstelle), und daraus folgt

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi(n)}\sum_{p\leqq n}\left(\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}-\alpha\right]\right)=\int_0^1\frac{1-t^\alpha}{1-t}\,dt.$$

Man kann aber unter $q_1, q_2, q_3, \ldots$ auch die Primzahlen einer arithmetischen Progression, oder die Zahlen verstehen, die nur zwei verschiedene Primfaktoren haben u. s. w.: der Satz II, angewandt auf die betrachteten Integrale und einige andere, liefert mühelos eine Fülle von asymptotischen Auswertungen zahlentheoretisch bedeutsamer Ausdrücke.