

Bemerkungen zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemann...

Siegel, C.

Mathematische Annalen

Volume 86 / 1922 / Issue / Article



Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de

Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.

(Aus einem Briefe an Herrn Hamburger¹⁾.)

Von

Carl Siegel in Göttingen.

Sie haben in Ihrer Arbeit: Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ -Funktion (Erste Mitteilung) [Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 240 bis 254] folgenden Satz bewiesen:

Es sei $G(s)$ eine ganze transzendente Funktion endlichen Geschlechts von $s = \sigma + ti$, $P(s)$ ein Polynom und $f(s) = \frac{G(s)}{P(s)}$ für $\sigma > 1$ durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$(1) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

darstellbar. Ist dann

$$(2) \quad f(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = g(1-s) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}},$$

wo $g(1-s)$ in eine für $\sigma < -\alpha < 0$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$(3) \quad g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{1-s}}$$

entwickelt werden kann, so ist $f(s) = \alpha_1 \zeta(s)$.

Ich gebe hier einen Beweis, der wohl kürzer und einfacher als der Ihrige ist. Er benutzt nur die beiden bekannten Formeln

¹⁾ Herr Hamburger hat inzwischen in den Math. Ann. **85** den Inhalt eines in Hamburg am 5. Oktober 1921 gehaltenen Vortrages publiziert, in welchem er einen in wesentlichen Punkten mit dem hier veröffentlichten übereinstimmenden Beweis gegeben hat. Ich betone, daß Herr Hamburger von meinen Untersuchungen vor Empfang meines Briefes keine Kenntnis hatte. (Zusatz bei der Korrektur.)

$$(4) \quad e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} y^{-s} \Gamma(s) ds \quad (y > 0),$$

$$(5) \quad \int_0^{\infty} e^{-a^2 x - \frac{b^2}{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-2ab} \quad (a > 0, b \geq 0).$$

Die absolute Konvergenz von (1) braucht dabei nicht für $\sigma > 1$, sondern nur für $\sigma > 2 - \theta$ ($\theta > 0$) vorausgesetzt zu werden.

Für jedes $x > 0$ ist nach (1) und (2)

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} x^{-\frac{s}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} g(1-s) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} x^{-\frac{s}{2}} ds = S_2. \end{aligned}$$

Hier ist links wegen der Beschränktheit von $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right|$ für $\sigma = 2$ Vertauschung von Integration und Summation gestattet; nach (4) ist daher

$$(6) \quad S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} (\pi n^2 x)^{-s} \Gamma(s) ds = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 x}.$$

Aus den Voraussetzungen über $f(s)$ und (2) folgt die Existenz zweier Zahlen $T > 0$, $\gamma > 0$, so daß im Gebiet $-\alpha - 1 \leq \sigma \leq 2$, $|t| \geq T$ die Funktion $g(1-s)$ regulär und $O(e^{|t|^\gamma})$ ist. Ferner ist sie wegen (3) auf der Geraden $\sigma = -\alpha - 1$ beschränkt; für $\sigma = 2$ ist sie $O(|t|^{\frac{1}{2}})$, wegen (1), (2) und der dort gültigen Relation

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = O(|t|^{\frac{1}{2}}).$$

Folglich gilt $g(1-s) = O(|t|^{\frac{1}{2}})$ für $|t| \geq T$, $-\alpha - 1 \leq \sigma \leq 2$; und es ist

$$(7) \quad S_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha-1-\infty i}^{-\alpha-1+\infty i} g(1-s) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} x^{-\frac{s}{2}} ds + \sum_{\nu=1}^m R_\nu,$$

wo R_1, \dots, R_m die Residua des Integranden bei seinen im Gebiet $-\alpha - 1 < \sigma < 2$ gelegenen Polen s_1, \dots, s_m bedeutet. Aus (2) folgt

$$\sum_{\nu=1}^m R_\nu = \sum_{\nu=1}^m x^{-\frac{s_\nu}{2}} Q_\nu(\log x) = Q(x),$$

wo Q_ν ein Polynom in $\log x$ bedeutet, und

$$(8) \quad \Re s_\nu \leq 2 - \theta \quad (\nu = 1, \dots, m).$$

Wegen (3) liefert (7)

$$(9) \quad S_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha+2-\infty i}^{\alpha+2+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} x^{-\frac{1-s}{2}} ds + Q(x) \\ = \frac{2}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi n^2}{x}} + Q(x).$$

Aus (6) und (9) folgt

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi n^2}{x}} + Q(x) \quad (x > 0).$$

Diese Gleichung multipliziere ich für festes $t > 0$ mit $e^{-\pi t^2 x}$ und integriere nach x von 0 bis ∞ ; da die Reihe der Integrale über die absoluten Beträge der Glieder konvergiert, gliedweise Integration also erlaubt ist, so folgt nach (5)

$$(10) \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\pi(t^2 + n^2)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{t} e^{-2\pi n t} + \int_0^{\infty} Q(x) e^{-\pi t^2 x} dx.$$

Hierin darf das Integral auf der rechten Seite gliedweise ausgeführt werden, denn nach (8) ist in $Q(x)$ jeder Term $O(x^{-1+\frac{\theta}{4}})$ für $x \rightarrow 0$; es ist also

$$(11) \quad \int_0^{\infty} Q(x) e^{-\pi t^2 x} dx = \frac{1}{t^2} \int_0^{\infty} Q\left(\frac{x}{t^2}\right) e^{-\pi x} dx = \sum_{\nu=1}^m t^{2\nu-2} H_\nu(\log t) = H(t),$$

wo H_ν ein Polynom in $\log t$ bedeutet.

(10) und (11) ergeben

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{t+ni} + \frac{1}{t-ni} \right) - \pi t H(t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-2\pi n t}.$$

In (12) ist

1. die Reihe auf der linken Seite in jedem endlichen Gebiet der t -Ebene exkl. $t = \pm ki$ ($k = 1, 2, \dots$) gleichmäßig konvergent; sie ist also die Partialbruchzerlegung einer meromorphen Funktion mit *Polen erster Ordnung* in $t = \pm ki$ vom Residuum a_k ,

2. $H(t)$ eine in der von 0 nach $-\infty$ aufgeschnittenen t -Ebene eindeutige für $t \neq 0$ reguläre Funktion von t ,

3. die rechte Seite für $\Re t > 0$ eine periodische Funktion von t mit der Periode i .

Folglich sind die Residua in den Punkten ki und $(k+1)i$ gleich, d. h. $a_k = a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$), $a_k = a_1$,

$$f(s) = a_1 \zeta(s),$$

q. e. d.

Göttingen, 30. September 1921.

(Eingegangen am 2. 10. 1921.)