Astron. Nachr., Bd. 301, H. 1 (1980)

Singularitäten in der Allgemeinen Relativitätstheorie

H.-J. TREDER, Potsdam-Babelsberg

Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR

(Eingegangen 1979 Juli 5)

Das „potentialtheoretische" Problem der Existenz überall regulärer Lösungen der EINSTEINschen Vakuum-Feldgleichungen $R_{ik} = 0$ (EINSTEINS „Partikel-Problem") ist von der Frage des Auftretens dynamischer Singularitäten in der ART sehr verschieden. Wenn die EINSTEINschen Gleichungen $R_{ik} - 1/2\, g_{ik}R = -\varkappa T_{ik}$ als Definitionsgleichungen für den Materie-Tensor T_{ik} aufgefaßt werden, so treten an die Stelle der 10 Feldgleichungen nur noch 2 Ungleichungen $R \geqq 0$, $R_0^0 \leqq 0$, die die Kausalität der Zustandsgleichungen für die Materie verlangen, wegen der $T \geqq 0$ und $T_0^0 \gtrless 1/2\, T$ sein muß. Aber genau diese Ungleichungen für die Raumkrümmung ergeben den Kollaps; bzw. Anti-Kollaps der Sterne, Stern-Systeme und des Kosmos („Big bang").

"Regular solutions of EINSTEIN's equations" mean very different things. In the case of the empty-space equations, $R_{ik} = 0$, such solutions must be metrics $g_{ik}(x^l)$ without additionaly singular "field sources" (EINSTEIN's "Particle problem"). — However the "phenomenological matter" is defined by the EINSTEIN equations $R_{ik} - 1/2 g_{ik}R = -\varkappa T_{ik}$ itselves. Therefore if 10 regular functions $g_{ik}(x^l)$ are given (which the inequalities of LORENTZ-signature fulfil) then these g_{ik} define 10 functions $T_{ik}(x^l)$ without singularities. But, the matter-tensor T_{ik} must fulfil the two inequalities $T \geqq 0$, $T_0^0 \geqq 1/2\, T$ only and therefore the EINSTEIN-equations with "phenomenological matter" mean the two inequalities $R \geqq 0$, $R_0^0 \leqq 0$ which are incompatible with a permanently regular metric with LORENTZ-signature, generally.

Das Problem der Existenz singularitätsfreier, d. h. überall regulärer, stetiger und stetig-differenzierbarer Gravitationsfelder in der ART, enthält mehrere Aspekte: Denjenigen der Gleichungen und denjenigen der Ungleichungen. — Wohldefiniert ist zunächst die Frage nach der Existenz von regulären, bestimmte Symmetrien (z. B. LIE-Symmetrien mit KILLING-Vektoren) besitzenden Lösungen der EINSTEINschen Vakuum-Feld-Gleichungen, welche die ganze Raum-Zeit-Welt V_4 überdecken und dabei ein bestimmtes Verhalten im Unendlichen haben (oder Eindeutigkeits- und Periodizitätsbedingungen bei endlichen Ausdehnungen der V_4 erfüllen). Hierbei wird das Überdecken der V_4 i. a. mit mehreren „Koordinaten-Karten" erfolgen müssen, um Koordinaten-Singularitäten zu eliminieren. Letztere Singularitäten sind dadurch ausgezeichnet, daß sie durch einen Wechsel des Koordinaten-Systems lokal beseitig bar sind; eine Eigenschaft, die „echten", z. B. den Potentialtheorien oder dynamischen Singularitäten nicht zukommt. Die Zahl der notwendigen Koordinaten-Mappen zur Überdeckung der V_4 ist eine topologische Invariante und ändert sich mit der Topologie der V_4.

Dieses Problem ist das der singularitätsfreien Lösungen der EINSTEINschen Gravitationsgleichungen sensu stricto. Gesucht werden überall reguläre, spezielle oder kosmologische EINSTEIN-Räume, die den 10 Gleichungen

$$R_{ik} = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3) \tag{1}$$

bzw.

$$R_{ik} = \lambda g_{ik} \tag{1a}$$

genügen, deren Metrik g_{ik} stetig und stetig-differenzierbar ist. Gefordert wird weiter, daß die g_{ik} bestimmte Symmetrieeigenschaften besitzen und physikalische Grenzbedingungen erfüllen (bzw. allgemeiner die EINSTEINschen V_4 eine bestimmte Topologie aufweisen).

Die bekannten Theoreme von SERINI, EINSTEIN-PAULI (1943), LICHNEROWICZ (1955) usw. besagen, daß es keine im potential-theoretischen Sinn regulären Lösungen der EINSTEINschen Vakuumgleichungen (1) gibt, die zeitunabhängig, d. h. stationär, sind und im räumlich Endlichen in die GALILEIsche Metrik übergehen. Das heißt, es gibt keine regulären speziellen EINSTEIN-Räume (1) mit zeitartigem KILLING-Vektor, derart daß bei geeigneter Koordinaten-Wahl $(\partial/\partial x_0)\, g_{ik} = 0$ gilt.

Diese Nichtexistenz-Theoreme lassen sich — mit zum Teil verschärften Nebenbedingungen — zu dem allgemeinerem Theorem ausweiten, daß es überhaupt keine Lösung der EINSTEINschen Vakuumgleichungen (1) gibt, die überall regulär sind und zu „allen Zeiten" die GALLILEIschen Grenzbedingungen im Unendlichen „genügend stark" erfüllen, derart daß in quasi-GALILEIschen Koordinaten für $r \to \infty$

$$g_{ik} - \eta_{ik} = o\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial r} g_{ik} = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \qquad (\eta_{ik} = \text{MINKOWSKI-Tensor}) \tag{2}$$

gilt. — Dieser Satz schließt natürlich die Existenz von freien Gravitationswellen nicht aus, da diese entweder die Grenzbedingungen zu allen Zeiten verletzen oder doch wenigstens vom Unendlichen ins Unendliche laufen (vgl. MERCIER, TREDER, YOURGRAU 1979).

Eine ganz andere Frage ist die der Existenz von (bei geeigneter Kartierung) wohlregulären Gravitationsfeldern mit Materie als Feldquelle, d. h. als rechte Seite der EINSTEINschen Gleichungen. Die inhomogenen EINSTEINschen Gleichungen können ja einfach als Definitionsgleichung für den Materietensor T_{ik} angesehen werden (s. SCHRÖDINGER 1950).

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik} - \lambda g_{ik} \left(\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}\right) \tag{3a}$$

bzw. ohne kosmologische Konstante:

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik} \leftrightarrow R_{ik} = -\varkappa(T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T) . \tag{3}$$

Der Materietensor T_{ik} ist dann weiter nichts als der mit der EINSTEINschen Gravitationskonstanten definierte EINSTEIN-Tensor

$$-\frac{1}{\varkappa}\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) \underset{\text{def}}{=} T_{ik} . \tag{3b}$$

Wir geben uns dann einfach 10 beliebige aber stetig und stetig-differenzierbare Funktionen g_{ik} mit den Signatur-Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l} g_{00} > 0 , \quad g_{11} > 0 , \quad g_{22} > 0 , \quad g_{33} < 0 ; \\ g = |g_{ik}| < 0 , \quad |g_{\mu\nu}| < 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \end{array}\right\} \tag{4}$$

vor und berechnen mit ihnen als Komponenten des metrischen Tensors die Komponenten des EINSTEIN-Tensors. Diese definieren gemäß (3) 10 überall reguläre Funktionen T_{ik}, die wir als reguläre Komponenten eines Materietensors auffassen. T genügt von selbst der dynamischen Gleichung, weil ja der EINSTEIN-Tensor der BIANCHI-Identität genügt:

$$(R_i^k - \tfrac{1}{2} \delta_i^k R)_{;k} = -\varkappa T_i^k{}_{;k} = 0 ,$$

(wo das Semikolon die kovariante Ableitung bedeutet).

Zu verlangen ist nur noch, daß die g_{ik} den GALILEIschen Grenzbedingungen genügen; dann verschwindet der Materietensor im räumlichen Unendlichen. Wird dann noch angenommen, daß die g von irgend einer Koordinatenkombination unabhängig sind, so daß sie bestimmte KILLING-Gleichungen erfüllen, so erhalten wir überall reguläre Gravitationsfelder mit entsprechenden Symmetrien.[1]

Zum Beispiel ergibt die Forderung, daß die regulären g von der zeitartigen Koordinate x_0 unabhängig sind, die stationären Gravitationsfelder.

Ein Problem entsteht aber daraus, daß die Materie $T_{ik}(x^l)$ weitere Bedingungen zu erfüllen hat, damit sie eine bestimmte physikalische Situation beschreibt oder überhaupt physikalisch interpretierbar ist. Dabei ist entweder anzunehmen, daß T_{ik} der Energie-Impuls-Tensor eines Materiefeldes $\varphi(x^l)$ ist, das dann entsprechenden Materiefeld-Gleichungen zu genügen hat, oder T_{ik} soll der Tensor phänomenologischer Materie sein. Im letzteren Fall muß dann T_{ik} physikalisch sinnvollen Zustandsgleichungen genügen, diese bedeuten jedoch nur Ungleichungen für die Komponenten T_0^0 und $T = T_i^i$ von T_i^k.

Im ersteren Fall sind statt der EINSTEINschen Gleichungen allein das System der gekoppelten Gravitationsfeldgleichungen und Matreielfedgleichungen für das Materiefeld φ zu lösen. Mit der LAGRANGE-Funktion

$$L^* = \sqrt{-g}\,(g^{ik} R_{ik} + \varkappa L)$$

bedeutet dies, daß die EINSTEINschen Gleichungen

$$\sqrt{-g}\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) = -\frac{\varkappa \delta(\sqrt{-g}\,L)}{\delta g_{ik}} \tag{5a}$$

sind, die kovarianten Materiefeld-Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\,L)}{\delta \varphi} = 0 \tag{5b}$$

simultan zu lösen sind. Wobei beide Felder

$$g_{ik} = g_{ik}(x^l) , \quad \varphi = \varphi(x^l)$$

regulär (i. a. stetig und stetig-differenzierbar) sein müssen und physikalische Grenzbedingungen zu fordern sind.

Dafür lehren wiederum die Existenztheoreme von EINSTEIN, PAULI u. a., daß es keine überall regulären Lösungen dieses Gleichungssystems (5a, 5b) gibt, die zeitunabhängig sind und GALILEIschen Grenzbedingungen genügen. Vorausgesetzt wird hierbei, daß die Materiefeld-Gleichungen die kovariant geschriebenen speziell relativistischen Gleichungen sind, z. B. die MAXWELLschen mit $L = -\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$.

Auch diese Theoreme lassen sich unter Verschärfung der Grenzbedingungen soweit ausdehnen, daß es überhaupt keine überall regulären, im Unendlichen GALILEIschen Lösungen (2) des gekoppelten Systems der EINSTEINschen- und der Materiefeld-Gleichungen (5a, b) gibt. — Es gibt aber wieder wellenartige Lösungen, z. B. solche bei denen elektromagnetische Wellen und Gravitationswellen miteinander gekoppelt sind.

---

[1] Es gibt natürlich Symmetrie-Forderungen, die keine nichttrivialen Lösungen $g_{ik} = g_{il}(x^l)$ haben, bzw. keine Lösungen, die überall reguläre g_{il} gestatten. Dann verbieten die RIEMANN-EINSTEINschen Gleichungen (3) die Regularität der T_{ik}.

Ganz anders ist die Situation bei phänomenologischer Materie, da der Materietensor hier (außer den Symmetrieforderungen des Problems) nur Ungleichungen zu erfüllen hat. Insofern bedeutet die Einführung von phänomenologischer Materie $T_{ik}(x^l)$ tatsächlich eine wesentliche Abschwächung der EINSTEINschen Gleichungen. Die aus den Symmetriebedingungen und den Grenzbedingungen folgenden Eigenschaften des Materietensors (3b) sind per definitionem durch diejenigen für die g_{ik} erfüllt. Anstatt der nicht aufgrund der Symmetriebedingungen identisch erfüllten Gleichungen treten bloße Ungleichungen, die nur obere (oder untere) Grenze angeben.

Bei einer zeitunabhängigen Metrik mit

$$\frac{\partial}{\partial x^0} g_{ik} = 0 \leftrightarrow g_{ik} = g_{ik}(x^\nu) \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

ist es dann sehr einfach, die GALILEIschen Grenzbedingungen erfüllenden überall stetige und stetig differenzierbare Funktionen $g_{ik}(x^\nu)$ vorzugeben, derart, daß alle Ungleichungen für den EINSTEIN-Tensor (3b) erfüllt sind. — Das älteste Beispiel ist das der inneren und äußeren SCHWARZSCHILD-Lösung. Diese Metrik ist statisch und sphärisch symmetrisch und das Innere enthält eine homogene Flüssigkeitskugel mit konstanter Dichte $\varrho = T_0^0 c^{-2}$ und mit aus der dynamischen Gleichung folgenden, an der Oberfläche verschiedenem hydrostatischem Druck p (vgl. MERCIER, TREDER, YOURGRAU 1979).

Aber die Ungleichungen haben eine bemerkenswerte Konsequenz. Sie erweisen sich als Grenzen für die gesamte Masse M des Schwerefeldes erzeugenden Körpers, wobei diese Grenzmasse von seiner Dichteverteilung $\varrho(x^\nu)$ abhängt. D. h. in Abhängigkeit von der Zeit-Zeit-Komponente

$$R_0^0 - \tfrac{1}{2} R = -\varkappa T_0^0 = -\varkappa \varrho c^2 \leqq 0 \tag{6}$$

des EINSTEIN-Tensors ergibt sich für die asymptotische Metrik

$$g = 1 - \frac{\varkappa c^2}{4\pi} \frac{M}{r}, \qquad g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}\left(1 + \frac{\varkappa c^2}{4\pi} \frac{M}{r}\right), \qquad g_{0\nu} = 0\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{7}$$

eine obere Grenze von M (vgl. MAVRIDES 1973).

Bei allgemeiner Zeitabhängigkeit der Metrik

$$g_{ik} = g_{ik}(x^l) \qquad (l = 0, 1, 2, 3)$$

ergeben die Materie-Ungleichungen noch ein weiteres Problem: Die EINSTEINschen Vakuumgleichungen (1) befinden sich in Involution. D. h. verschwinden zu einem Zeitpunkt $x^0 = ct = 0$ das ist auf einer regulären raumartigen Hyperfläche mit die zeitartige Komponente $R_i^0 - \frac{1}{2}\delta_i^0 R$ des EINSTEIN-Tensors, so sorgt die Erfüllung der übrigen 6 EINSTEINschen Gleichungen

$$R_\nu^\mu - \tfrac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

in der Umgebung dieser Hyperfläche bereits dafür, daß

$$R_i^0 - \tfrac{1}{2}\delta_i^0 R = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

und in einem endlichen Zeitintervall gilt (s. LICHNEROWICZ 1955, TREDER, 1974).

In einem Raum mit Materie ist dagegen der Schluß, daß wenn auf einer raumartigen Hyperfläche $x_0 = 0$ die Ungleichung

$$R_0^0 - \tfrac{1}{2} R \leqq 0$$

erfüllt ist, daraus auch die Erfüllung dieser Ungleichung in der Umgebung folgt, nicht mehr möglich. I. a. ist ja überhaupt

$$R_\mu^\nu - \tfrac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = -\varkappa T_\mu^\nu \neq 0\,. \tag{8}$$

Aber auch für reine wirbelfreie Staubmaterie

$$T_i^k = \varrho u_i u^k \qquad (u_i u^i = c^2) \tag{9}$$

können wir aus der Erfüllung der Ungleichung

$$R_0^0 - \tfrac{1}{2} R = -\varkappa T_0^0 \leqq 0$$

zu einem Zeitpunkt $x^0 = 0$ nicht schließen, daß in der Umgebung nicht auch

$$R_0^0 - \tfrac{1}{2} R > 0$$

sein kann.

Im letzteren Fall ist allerdings notwendig, daß diejenige Hyperfläche $x_0 \doteq a = \text{const}$ auf der die Komponente $R_0^0 - \frac{1}{2} R$ des EINSTEIN-Tensors verschwindet, eine Kaustik mit $|g_{\mu\nu}| = 0$ für $x^0 = a$ ist. Genau dann liegt deren (isotroper) Normalvektor $p_i = \delta_i^0$ in der Fläche $x^0 = a$ selbst und der Involutionsschluß ist nicht mehr möglcih. — Tatsächlich ergeben für allgemeine zeitabhängige g die GAUSSschen synchronen Koordinatensysteme mit den Hyperflächenscharen $x^0 = \text{const}$ und mit $g_{00} = 1$, $g_{0\nu} = 0$ $(\nu = 1, 2, 3)$ i. a. kaustische Flächen, auf denen $|g_{\mu\nu}| = 0$ ist. (S. LANDAU, LIFSHITZ 1977). Wird nun durch die Metrik g_{ik} gemäß (3b) z. B. eine reine Staubmaterie $T_i^k = \varrho u_i u^k$ (mit $u_i u^i = c^2$) definiert, so hat dieser Materietensor in einem GAUSSschen Koordinatensystem die Form

$$T_0^0 = \varrho c^2\,, \qquad T_i^k = 0 \quad \text{für} \quad i, k \neq 0,$$

vorausgesetzt, daß die Weltlinien dieser Staub-Materie wirbelfrei sind, so daß $u_i = \delta_i^0$ gesetzt werden kann. Dann sind die geodätischen Weltlinien der Staubpartikeln die Koordinatenlinien x^0 der Zeit. Auf den Kaustiken $|g_{\mu\nu}| = 0$ wird dann die Massendichte $\varrho > 0$ singulär (vgl. TREDER 1974).

Allgemein sind für die Definition der phänomenologischen Materie durch die EINSTEINschen Gleichungen (3b) mit einer gegebenen Metrik $g_{ik}(x^l)$ nur 2 Ungleichungen zu befriedigen, die die speziell-relativistische Kausalität (Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit) und die Positivität der Trägheit ausdrücken.

Ist — wie vorausgesetzt — x^0 die zeitartige Koordinate im gewählten Bezugssystem, so müssen für den Materie-Tensor die Ungleichungen gelten:

$$T = T_i^i = T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3 \geqq 0\,, \qquad T_0^0 \geqq \tfrac{1}{2} T\,. \tag{10}$$

Diese ergeben mit (3) für den Krümmungsskalar R die Ungleichung

$$R = \varkappa T \geqq 0 \tag{11a}$$

und für die Zeit-Zeit-Komponente des RICCI-Tensors die Ungleichung

$$R_0^0 = -\varkappa(T_0^0 - \tfrac{1}{2} T) \leqq 0\,, \tag{11b}$$

woraus für die Zeit-Zeit-Komponente des EINSTEIN-Tensors schließlich noch

$$R_0^0 - \tfrac{1}{2} R = \varkappa T_0^0 \leqq 0 \tag{11c}$$

folgt. (Vgl. LANDAU, LIFSHITZ 1977).

Während diese Ungleichungen für stationäre Materie $(\partial/\partial x_0)\, g_{ik} = 0$ nur obere Grenzen für die Massen M in der asymptotischen Metrik (7) vorschreiben (die allerdings physikalisch kaum verständlich sind: vgl. MISNER, THORNE, WHEELER 1973), verbieten die Ungleichungen (11) bei wesentlich zeitabhängiger Metrik, d. h. in einem nicht-stationären Kosmos, ganze (evtl. alle physikalisch sinnvollen) Klassen von Materie. Denn eine Dynamik, die mit (11a,b) verträglich ist, kann auch dann nicht zu allen Zeiten bestehen bleiben, wenn sie in endlichen Zeiträumen besteht. Dies impliziert den Kollaps, bzw. den Antikollaps der Materie, darunter den „big bang" der Kosmologie (vgl. MAVRIDES 1973, MERCIER et al. 1979). D. i., die Ungleichungen (11) schließen i. a. eine überall singuläre Metrik $g_{ik}(x^l)$ mit LORENTZ-Signatur aus.

Das besagt, daß eine überall reguläre, stetige und stetig-differenzierbare Metrik mit permanenter LORENTZ-Signatur (4) auf unphysikalische Zustände führt, sei es in der Vergangenheit oder in der Zukunft. Diese unphysikalischen Zustände sind dann weder mit irgendwelchen Materiefeld-Gleichungen (5b) noch auch nur mit den Ungleichungen (10) für die Kausalität der Zustandsgleichungen verträglich. Vielmehr führen solche Metriken $g_{ik}(x^l)$, wenn für sie überall die Ungleichungen (4) erfüllbar sein sollen, allgemein auf Mannigfaltigkeiten V_4, deren EINSTEIN-Tensor nur für beschränkte Zeiten eine physikalisch sinnvolle Materie definiert.

Will man daran etwas ändern, und sowohl Massenverteilungen ohne obere Schranken für die Gesamtmasse M als auch eine unbegrenzte zeitliche Gültigkeit der Dynamik postulieren, so muß man von dem durch die EINSTEINschen Gleichungen (3) implizierten Definition des Materie-Tensors (3b) abgehen. D. h. man muß die „EINSTEINschen-Gleichungen mit Materie" abändern. Dies hat so zu erfolgen, daß aus den Materie-Ungleichungen

$$T \geqq 0\,, \qquad T_0^0 \geqq \tfrac{1}{2} T\,. \tag{12a}$$

nicht mehr die Ungleichungen

$$R \geqq 0\,, \qquad R_0^0 \leqq 0 \tag{12b}$$

für die Raumkrümmung folgen (TREDER, 1978). Die Materie-Ungleichungen (12a) sind notwendige Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie. Daß aber aus ihnen auch (12b) folgt, ist eine besondere Eigenschaft der ART.

In der Tat läßt sich der physikalische Sinn der Ungleichungen (12a, b) aus der Sprache der ART in die der NEWTONschen Gravodynamik übesetzen und ihre Bedeutung ist dann leicht zu verstehen (TREDER 1974). — Die Ungleichung $R_0^0 \leqq 0$ besagt, daß in EINSTEINS ART genauso wie in NEWTONS Theorie die gravitativen Zentripetalkräfte einer Materie-Insel mit endlicher Materie-Dichte $\varrho \geqq 0$ mit wachsendem Radius r dieser Insel beliebig groß werden; die gravitative Attraktion ist $\sim r$ (s. EINSTEIN 1917). Dagegen besagt die aus der relativistischen Kausalität folgende Ungleichung $T \geqq 0$, daß die jeweilige lokale Lichtgeschwindigkeit $c^* \approx \sqrt{g_{00}/g_{11}}\, c \leqq c$ auch die lokale Grenzgeschwindigkeit ist. Daher sind die Zentrifugalkräfte beschränkt (und sind am Rand der Materie-Insel $\leqq c^{*2}/r$). Das unbegrenzte Anwachsen der Zentripetal. und die Beschränktheit der Zentrifugal-Kräfte eines großen Systems bewirken dessen kollabieren (bzw. das Auftreten einer Grenzmasse für stationäre Systeme). — Der Kollaps beschleunigt sich — in der lokalen Eigenzeit gemessen — ständig selbst, da ja die gravitative Attraktion mit der Dichte ϱ anwächst (angenähert $\sim \varrho^{2/3}$), während die lokale Lichtgeschwindigkeit c^* angenähert $\sim \varrho^{-1/3}$ ist.

Literatur

EINSTEIN, A.: 1917, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. d. AdW zu Berlin, 142.
EINSTEIN, A. und PAULI, W.: 1943, Ann. Math. **44**, 131.
LANDAU, L. D. und LIFSCHITZ, E.: 1977, Klassische Feldtheorie, Berlin.
LICHNEROWICZ, A.: 1955, Theories relativistes de la gravitation, Paris.
MAVRIDES, S.: 1973, L'Univers relativiste, Paris.
MERCIER, A., TREDER, H.-J. und YOURGRAU, W.: 1979, On general Relativity, Berlin.
MISNER, W., THORNE, K. S. and WHEELER, J. A.: 1973, Gravitation, San Francisco.
SCHRÖDINGER, E.: 1950, Space-Time Structure, Cambridge.
TREDER, H.-J.: 1974, Der physikalische Raum, Berlin.
TREDER, H.-J.: 1978, Tensor **32**, 51.

Anschrift des Verfassers:

HANS-JÜRGEN TREDER
Zentralinstitut für Astrophysik der AdW der DDR
Sternwarte Babelsberg
Rosa-Luxemburg-Str. 17a
DDR-1502 Potsdam-Babelsberg
Deutsche Demokratische Republik