Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod l

Schoenberg, I.,

in: Mathematische Zeitschrift - 28 | Periodical
29 page(s) (171 - 199)

Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1.

Von

Isac Schoenberg in Jassy (Rumänien).

Die vorliegende Arbeit schließt sich an die Abhandlung von Herrn Weyl[1]) über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1 an, und zwar werden wir hier eine Verallgemeinerung dieser Fragestellung behandeln. — Das qualitativ wesentliche an der Gleichverteilung ist das Vorhandensein einer Verteilungswahrscheinlichkeit und wir behandeln hier die Verteilung von Zahlen mod 1 nur von diesem Standpunkt aus. — Interessante Fälle einer solchen ungleichmäßigen Verteilung sind schon von den Herren Pólya[2]) und Szegö[3]) behandelt worden. Für eine eingehendere analytische Behandlung im allgemeinen Fall erscheint aber als wesentlich auch die Forderung der Stetigkeit der Verteilungswahrscheinlichkeit der Zahlen.

Unsere Aufgabe erscheint aufs engste mit dem Momentenproblem für ein endliches Intervall verknüpft, welches von Herrn Hausdorff[4]) in einer wichtigen Abhandlung behandelt worden ist.

Der Fall einer monotonen stetigen Belegungsfunktion als Lösung wurde aber darin nicht betrachtet, und da hier gerade dieser Fall erscheint, mußte ich das hier nachholen.

Diese letzte Aufgabe erscheint, im Falle des Fourierschen Momentenproblems, in enger Beziehung zu neueren Untersuchungen der Herren F. Riesz[5]), L. Neder[6]) und S. Sidon[7]) über die Fourierkoeffizienten stetiger, periodischer Funktionen von beschränkter Schwankung.

[1]) „Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins", Math. Annalen **77** (1916), S. 313–352.

[2]) „Über eine neue Weise bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen", Göttinger Nachrichten 1917, S. 149–159.

[3]) Math. és. term. tud. ért. **36** (1918), S. 531. — Vgl. Pólya und Szegö, „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis", Bd. 1, II. Abschnitt, Nr. 44 und 194.

[4]) „Momentprobleme für ein endliches Intervall", Math. Zeitschr. **16**, S. 220–248.

[5]) „Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung", Math. Zeitschr. **2**, S. 312–315.

[6]) „Über die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung". Math. Zeitschr. **6**, S. 270–273.

[7]) „Über die Fourier-Koeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung", Acta litter. ac scient. univ. Hungaricae **2**, I (1924), S. 43–46. Siehe den Zusatz am Schluß dieser Arbeit.

In den beiden letzten Paragraphen mache ich einige Anwendungen der allgemeinen Sätze.

Es sei mir noch gestattet, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. S. Sanielevici in Jassy für seine freundlichen Ratschläge bei der endgültigen Abfassung dieser Arbeit meinen Dank auszusprechen.

§ 1.

Definition der asymptotischen stetigen Verteilung mod 1 und einleitende Sätze. — Die zwei Fragestellungen.

1. Es seien

$$x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

n reelle Zahlen, die wir uns schon mod 1 reduziert denken können, also alle der Strecke $0 \leqq x \leqq 1$ angehörend.

Sollte x_{in} $(i \leqq n)$ nur von i abhängen, so sind die Zahlen (1) die ersten n Zahlen einer Zahlenfolge

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

und die Reihenfolge der Glieder ist für das folgende wesentlich.

Es sei für den Augenblick x eine feste Zahl mit $0 < x < 1$ und es sei $m_x(n)$ die Anzahl derjenigen unter den Zahlen (1), welche der abgeschlossenen Teilstrecke $0 \ldots x$ angehören.

Wir sagen, daß die Zahlen (1) sich für $n \to \infty$ auf der Strecke $0 \ldots 1$ *asymptotisch stetig verteilen*, wenn für jedes feste x

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m_x(n)}{n} = z(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{2}$$

vorhanden ist und, $z(0) = 0$ und $z(1) = 1$ gesetzt, die Funktion $z(x)$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ stetig ist.

Die Funktion $z(x)$ wollen wir die *Verteilungsfunktion* der Zahlen (1) nennen.

Es folgt nach der Definition, daß $z(x)$ nie abnimmt. Derartige Funktionen $z(x)$, die für $0 \leqq x \leqq 1$ monoton und stetig sind, mit $z(0) = 0$, $z(1) = 1$, wollen wir fortab kurz als Verteilungsfunktionen bezeichnen.

Dann und nur dann liegt asymptotische *Gleichverteilung* vor, wenn $z(x) = x$ ist.

Wenn wir z. B. von den mod 1 reduzierten Zahlen

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$$

ausgehen, so findet man, wie Herr Pólya gezeigt hat, für die Verteilungsfunktion

$$z(x) = \int_0^1 \frac{1 - t^x}{1 - t}\, dt.$$

2. Wir beweisen zunächst den folgenden

Satz I. *Es sei* $f(x)$ *für* $0 \leqq x \leqq 1$ *von beschränkter Schwankung und* $z(x)$ *sei nach der obigen Definition die Verteilungsfunktion der Zahlen* (1), *dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{1n})+f(x_{2n})+\ldots+f(x_{nn})}{n} = \int_0^1 f(x)\,dz(x), \tag{3}$$

wo das Integral im Sinne von Stieltjes einen Sinn hat, weil wir $z(x)$ *stetig voraussetzen.*

Der Beweis ist ebenso leicht wie für den Spezialfall der Gleichverteilung, also $z(x) = x$ [8]).

Aus der Limesgleichung (2) folgt sofort, daß (3) jedenfalls für Treppenfunktionen mit endlich vielen Treppen gültig ist.

Man kann nun, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben wird, zwei derartige Treppenfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bestimmen, daß

$$f_1(x) \leqq f(x) \leqq f_2(x) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \quad \text{und} \quad \int_0^1 f_2(x)\,dz(x) - \int_0^1 f_1(x)\,dz(x) < \varepsilon.$$

Wir wollen auch fernerhin allgemein die Abkürzung

$$M_n(F) = \frac{F(x_{1n})+F(x_{2n})+\ldots+F(x_{nn})}{n}$$

für diesen Mittelwert benutzen.

Da Formel (3) für $f_1(x)$ gilt, so ist für genügend großes n

$$M_n(f_1) > \int_0^1 f_1\,dz - \varepsilon.$$

Aber $\quad M_n(f) \geqq M_n(f_1) \quad$ und $\quad \int_0^1 f\,dz - \int_0^1 f_1\,dz \leqq \int_0^1 f_2\,dz - \int_0^1 f_1\,dz < \varepsilon,$

also
$$M_n(f) > \int_0^1 f\,dz - 2\varepsilon \quad \text{für großes } n.$$

Von $f_2(x)$ ausgehend, erhält man die Abschätzung nach oben

$$M_n(f) < \int_0^1 f\,dz + 2\varepsilon \quad \text{für großes } n,$$

also zusammenfassend

$$\left| M_n(f) - \int_0^1 f\,dz \right| < 2\varepsilon \quad \text{für großes } n$$

und der Satz ist bewiesen.

---

[8]) Vgl. H. Weyl a. a. O. S. 314.

Im Satz I kann natürlich die Funktion $f(x)$ auch komplex sein, wenn nur Real- und Imaginärteil den Bedingungen genügen.

Indem wir in der Formel (3) die Funktion $f(x)$ passend spezialisieren, erhalten wir, daß für $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{1n}^k + \ldots + x_{nn}^k}{n} = \mu_k, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2\pi i k x_{1n}} + \ldots + e^{2\pi i k x_{nn}}}{n} = \omega_k \tag{5}$$

vorhanden sind und deren Werte erhalten wir aus

$$\int_0^1 x^k dz(x) = \mu_k \qquad (\mu_0 = 1;\ k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4'}$$

$$\int_0^1 e^{2\pi i k x} dz(x) = \omega_k \quad (\omega_0 = 1;\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5'}$$

Diese Grenzwerte erscheinen also als Stietjes- resp. Fouriermomente der Verteilungsfunktion $z(x)$.

3. Wir haben bisher vorausgesetzt, daß sich die Zahlen (1) asymptotisch stetig verteilen. Wir wollen nun diese Voraussetzung fallen lassen und wir beweisen, *daß aus den Gleichungen* (4) *auch die Existenz der Limites* ω_k, *also auch die Gleichungen* (5) *folgen. Allgemeiner, aus den Gleichungen* (4) *oder* (5) *folgt, daß der Limes*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{1n}) + f(x_{2n}) + \ldots + f(x_{nn})}{n} = L(f) \tag{6}$$

vorhanden ist, für jede für $0 \leqq x \leqq 1$ *stetige Funktion* $f(x)$.

Der Beweis ist sofort erledigt. Wir wollen etwa von den Gleichungen (4) ausgehen und zeigen, daß $L(f)$ vorhanden ist.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben.

Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz kann man ein Polynom so bestimmen, daß

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + r(x)$$

und

$$|r(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1.$$

In der abkürzenden Bezeichnung von 2 folgt aus der letzten Gleichung

$$M_n(f) = a_0 + a_1 M_n(x) + \ldots + a_m M_n(x^m) + M_n(r)$$

und aus $M_n(x^k) \to \mu_k$ für $n \to \infty$ und $|M_n(r)| < \varepsilon$ folgt

$$|M_n(f) - (a_0 + a_1\mu_1 + \ldots + a_m\mu_m)| < 2\varepsilon$$

für genügend großes n, also auch

$$|M_{n+p}(f) - M_n(f)| < 4\varepsilon \quad \text{für großes } n$$

und also ist Formel (6) bewiesen.

Man beweist dasselbe ebenso leicht, wenn man von den Gleichungen (5) ausgeht, indem man $f(x)$ durch ein trigonometrisches Polynom approximiert.

4. Wir benutzen jetzt den Zusammenhang mit dem Momentenproblem und beweisen den

Satz II. *Es mögen die Grenzwerte μ_k gemäß den Gleichungen (4) vorhanden sein ($\mu_0 = 1$) und es sei das Momentenproblem (4′) durch eine stetige monotone Funktion $z(x)$ lösbar, wobei wir $z(0) = 0$ voraussetzen dürfen.*

Unter diesen Umständen verteilen sich unsere Zahlen (1) asymptotisch stetig und es ist $z(x)$ deren Verteilungsfunktion.

Man kann genau dasselbe beweisen, wenn man von den Fouriermomenten ω_k ausgeht und $z(x)$ den Gleichungen (5′) genügt.

Es seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, dann folgt nach **3** die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} M_n(f) = L(f) \quad \text{für jedes stetige } f(x).$$

Man sieht nun leicht, daß

$$L(f) = \int_0^1 f(x)\,dz(x),$$

denn nach (4) und (4′) ist diese Gleichung für jedes Polynom richtig und nach dem Approximationssatz folgt sie auch sofort für jede stetige Funktion.

Der Satz II besagt, daß für $0 < \vartheta < 1$, in der Bezeichnung von **1**,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_\vartheta(n)}{n} = z(\vartheta),$$

für jedes solche ϑ.

Wir betrachten folgende Funktion mit einem Sprung

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \vartheta, \\ 0 & \;\;\text{„}\;\; \vartheta < x \leqq 1, \end{cases}$$

und da

$$M_n(v) = \frac{m_\vartheta(n)}{n} \quad \text{und} \quad \int_0^1 v(x)\,dz(x) = z(\vartheta),$$

so genügt es zu beweisen, daß

$$\lim_{n\to\infty} M_n(v) = L(v) = \int_0^1 v(x)\,dz(x).$$

Es sei $\varepsilon > 0$ fest, genügend klein, damit $0 < \vartheta - \varepsilon$ und $\vartheta + \varepsilon < 1$. Es seien $\psi_+(x)$ und $\psi_-(x)$ die zwei stetigen Funktionen, welche die Streckenzüge $ACEF$ resp. $ABDF$ der Fig. 1 darstellen. Es ist

$$\psi_-(x) \leqq v(x) \leqq \psi_+(x), \quad \text{also} \quad M_n(\psi_-) \leqq M_n(v) \leqq M_n(\psi_+).$$

Für $\delta > 0$ fest folgt also (ψ_+ und ψ_- sind stetig!)

$$\int_0^1 \psi_-(x)\,dz(x) - \delta < M_n(v) < \int_0^1 \psi_+(x)\,dz(x) + \delta$$

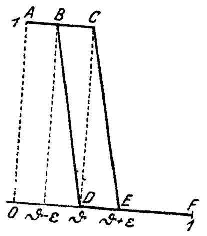

Fig. 1.

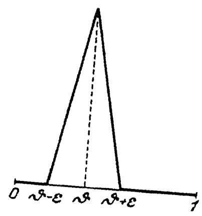

Fig. 2.

für genügend großes n und es folgt daraus die Existenz des Grenzwertes von $M_n(v)$ und aus $\int \psi_- dz \leqq \int v\,dz \leqq \int \psi_+ dz$ [9]) auch sein Wert

$$\int_0^1 v\,dz(x),$$

wenn wir zeigen können, daß die Differenz

$$\Delta_\varepsilon = \int_0^1 \psi_+(x)\,dz(x) - \int_0^1 \psi_-(x)\,dz(x)$$

für genügend kleines ε auch beliebig klein wird.

Es sei $\psi(x) = \psi_+(x) - \psi_-(x)$ (Fig. 2), so folgt

$$\Delta_\varepsilon = \int_0^1 \psi(x)\,dz(x) = \int_{\vartheta-\varepsilon}^{\vartheta+\varepsilon} \psi(x)\,dz(x) = -\int_{\vartheta-\varepsilon}^{\vartheta+\varepsilon} z(x)\,d\psi(x)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\vartheta}^{\vartheta-\varepsilon} z(x)\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\varepsilon} z(x)\,dx$$

und dieser letzte Ausdruck strebt für $\varepsilon \to 0$ gegen $-z(\vartheta - 0) + z(\vartheta + 0)$, also gegen Null, denn $z(x)$ ist stetig. Damit ist der Satz bewiesen.

5. Man kann nun zwei verschiedene Fragestellungen verfolgen:

A. *Es sei eine Verteilungsfunktion* $z(x)$ [10]) *a priori gegeben.*

---

[9]) Diese Ungleichungen gelten, weil $z(x)$ auch monoton und nie abnehmend ist.

[10]) Diese Funktion sei also für $0 \leqq x \leqq 1$ stetig, monoton $z(0) = 0$, $z(1) = 1$, siehe 1.

Es sollen Kriterien aufgestellt werden, welche die asymptotische Verteilung unserer Zahlen (1) *nach der Funktion* $z(x)$ *gewährleisten.*

B. *Man finde Kriterien, welche uns überhaupt eine asymptotische stetige Verteilung der Zahlen* (1) *erkennen lassen, wo also die Verteilungsfunktion nicht von vornhinein gegeben wird, sondern beliebig sein kann und erst hinterher durch die Zahlen* (1) *bestimmt wird.*

Es ist natürlich die zweite Fragestellung interessanter, denn wenn man von (auf irgend eine Weise) bestimmten Zahlen (1) ausgeht (wie z. B. $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n} \bmod 1$), so ist doch zunächst gewiß $z(x)$ ganz unbekannt.

6. Wir wollen zunächst die Fragestellung A erledigen, auf welche man mit Hilfe des Satzes II auf verschiedene Arten eingehen kann.

Für $z(x) = x$ entsteht die Frage nach der Gleichverteilung der Zahlen (1), wofür die Gleichungen

$$(7) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{e^{2\pi i k x_{1n}} + e^{2\pi i k x_{2n}} + \ldots + e^{2\pi i k x_{nn}}}{n} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

notwendig und hinreichend sind[11]).

Im allgemeinen Fall eines gegebenen $z(x)$ sind notwendig und hinreichend für die Verteilung der Zahlen (1) nach $z(x)$, entweder die Gleichungen (4) *oder* diejenigen (5) für $k = 1, 2, 3, \ldots$, wobei die entsprechenden Zahlen μ_k und ω_k aus (4′) und (5′) zu entnehmen sind, denn alle Bedingungen des Satzes II sind damit erfüllt.

Man kann den Bedingungen auch eine andere Gestalt geben.

Es sei
$$Q_0(x) \equiv 1, \; Q_1(x), \; Q_2(x), \; \ldots$$
eine Folge von Funktionen, die für $0 \leqq x \leqq 1$ stetig sind und den Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^1 Q_m(x)\, Q_n(x)\, dz(x) = 0 \qquad (m \neq n, \; m \geqq 0, \; n \geqq 0)$$

genügen. Es sei außerdem möglich, irgend eine stetige Funktion durch lineare Aggregate der $Q_n(x)$ mit konstanten Koeffizienten beliebig genau gleichmäßig zu approximieren.

Eine solche Funktionenfolge bilden z. B. die durch diese Bedingungen bis auf konstante Faktoren eindeutig bestimmten sogenannten Stieltjesschen Polynome von $z(x)$.

---

[11]) H. Weyl a. a. O. Satz 1, S. 315.

Notwendig und hinreichend für die Verteilung der Zahlen (1) *nach* $z(x)$ *sind dann die Bedingungen*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_k(x_{1n}) + Q_k(x_{2n}) + \cdots + Q_k(x_{nn})}{n} = 0 \qquad (\text{für } k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Auf den Beweis, der sofort aus dem Weierstraßschen Approximationssatz und dem Satz II folgt, will ich nicht mehr eingehen.

§ 2.

Kriterien für asymptotische stetige Verteilung mit Hilfe der Stieltjesmomente μ_k.

7. Wir haben in **3.** bewiesen, daß aus den Gleichungen (4) oder (5) auch die Gleichung (6) für jede stetige Funktion $f(x)$ folgt. Wir fassen nun die Operation $L(f)$ ins Auge unter Voraussetzung der Gleichungen (4).

Sie ist offenbar linear, das heißt $L(af + b\varphi) = aL(f) + bL(\varphi)$, und auch beschränkt. Denn aus

$$|M_n(f)| \leqq \operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} |f(x)| = \mathfrak{M}$$

folgt auch

$$|L(f)| \leqq \mathfrak{M}.$$

Nach einem wichtigen Satz von Herrn F. Riesz[12]) kann man nun folgern, daß es eine monotone Funktion $z(x)$ gibt, so daß für jedes stetige $f(x)$

$$L(f) = \int_0^1 f(x)\, dz(x).$$

Wir setzen $z(0) = 0$. Dann ist natürlich $(f \equiv 1)$ $z(1) = 1$ und die Funktion $z(x)$ nimmt also nie ab.

Es sind also die Momentenprobleme (4′) *und* (5′) *mit Hilfe einer monotonen Funktion* $z(x)$ *lösbar*[13]).

Um aus dem Satz II zu folgern, daß sich unsere Zahlen (1) asymptotisch stetig verteilen, haben wir noch *die Stetigkeit* der auf diese Weise gewonnenen Funktion $z(x)$ nötig, und zwar muß man, um zu brauchbaren Kriterien zu gelangen, die dazu nötigen Bedingungen in den Grenzwerten

[12]) „Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionelles linéaires", Annales de l'école normale 3e série **31** (1914) S. 9–14.

Aus dem Satz von Herrn Riesz folgt zunächst, daß $z(x)$ von beschränkter Schwankung ist, aber man ersieht aus seinem Beweis a. a. O., daß, wenn immer $L(f) \geqq 0$ für $f(x) \geqq 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$, die Funktion $z(x)$ sogar monoton ist.

Hier ist diese Zusatzbedingung natürlich erfüllt.

[13]) Man bemerkt sofort, daß die Zahlen μ_k eine total monotone Folge bilden und dann folgt dasselbe Ergebnis auch aus einem Satz von Herrn Hausdorff.

Die Umkehrung ist auch richtig, daß heißt: wenn die total-monotone Folge μ_k $(\mu_0 = 1)$ gegeben ist, so gibt es entsprechende Zahlen (1), so daß (4) gilt.

μ_k oder in den ω_k ausdrücken. Die Untersuchung gestaltet sich ganz verschieden, je nachdem man von den μ_k oder den ω_k Gebrauch macht und wir wollen mit den ersteren beginnen.

8. Wir gehen also jetzt von der Funktion $z(t)$ aus, und zwar sei sie für $0 \leqq t \leqq 1$ monoton mit $z(0)=0$ und $z(1)=1$ und wir bilden ihre Momente

$$(8) \qquad \int_0^1 t^k \, dz(t) = \mu_k \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Wir betrachten auch das Integral

$$(9) \qquad f(x) = \int_0^1 \frac{dz(t)}{1-xt}$$

und man sieht sofort, daß es eine, in der von 1 bis $+\infty$ längst der reellen Ache aufgeschlitzten x-Ebene, reguläre analytische Funktion darstellt.

Aus (8) und (9) folgt die Potenzreihenentwicklung

$$(10) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^n \qquad \text{für} \quad |x| < 1.$$

Wir verwerten die durch (10) gegebene Funktion und beweisen den

Hilfssatz I. *Damit die monotone Funktion $z(t)$ für $0 \leqq t \leqq 1$ stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Funktion $f(x)$ folgenden Randbedingungen genügt:*

(α) *Für jedes feste r mit $1 \leqq r < \infty$ sei*

$$\lim_{x \to r} (x-r) f(x) = 0,$$

wenn x auf irgend einem Weg[14]) *mit bestimmter Tangente, welche mit der Strecke $1 - +\infty$ nicht zusammenfällt, in r einläuft.*

(β) *Es sei*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

wenn x in irgend einer, von derjenigen der positiven reellen Achse verschiedenen Richtung[14]) *nach ∞ strebt.*

Es sei

$$\vartheta = \frac{1}{r}.$$

Nach (9) ist

$$(1 - x\vartheta) f(x) = \int_0^1 \frac{1-x\vartheta}{1-xt} \, dz(t).$$

[14]) Ein Weg genügt, dasselbe folgt schon für die anderen.

Die Kurve, auf der $\frac{1}{x}$ in ϑ einläuft, bildet auch einen endlichen Winkel mit der Strecke $0-1$ und es folgt daraus, daß

$$\left|\frac{1-x\vartheta}{1-xt}\right| < M$$

also beschränkt, für $0 \leqq t \leqq 1$ und $\frac{1}{x}$ auf jener festen Kurve. *Es sei $z(t)$ an der Stelle $t=\vartheta$ stetig.* Es sei auch $\vartheta < 1$.

Wenn wir die Umgebung $\vartheta-\varepsilon \ldots \vartheta+\varepsilon$ von ϑ herausschneiden ($\varepsilon > 0$ genügend klein), so strebt für $\frac{1}{x} \to \vartheta$ (auf der Kurve!) der Ausdruck

$$\left|\frac{1-x\vartheta}{1-xt}\right| = \left|\frac{\frac{1}{x}-\vartheta}{\frac{1}{x}-t}\right| \to 0$$

und zwar gleichmäßig für alle Werte von t mit $|t-\delta| \geqq \varepsilon$.

Für $\frac{1}{x}$ genügend nahe an ϑ ist also

$$|1-x\vartheta|\cdot|f(x)| < \int\limits_{\vartheta-\varepsilon}^{\vartheta+\varepsilon}\left|\frac{1-x\vartheta}{1-xt}\right| dz(t)+\varepsilon < M(z(\vartheta+\varepsilon)-z(\vartheta-\varepsilon))+\varepsilon$$

und wird also unendlich klein für ε genügend klein da wir $z(t)$ in ϑ stetig voraussetzen. Es ist also (α) erfüllt.

Derselbe Schluß gilt auch für $\vartheta = 1$.

Es sei $z(t)$ an der Stelle $t=\vartheta$ unstetig mit dem Sprung σ.

Wir betrachten die Funktion $z_1(t)$, die für $t=\vartheta$ stetig ist:

$z_1(t) = z(t)$ für $0 \leqq t < \vartheta$ und $z_1(t) = z(t) - \sigma$ für $\vartheta < t \leqq 1$.

Es ist dann

$$(1-x\vartheta)f(x) = \int\limits_0^1 \frac{1-x\vartheta}{1-xt}\,dz(t) = \int\limits_0^1 \frac{1-x\vartheta}{1-xt}\,dz_1(t)+\sigma,$$

denn das Integral ändert sich um den Sprung multipliziert mit dem Wert des Integranden an der Sprungstelle, hier gleich 1.

Da z_1 in ϑ stetig ist, so strebt, wie schon bewiesen, das Integral der rechten Seite gegen Null und $(1-x\vartheta)f(x) \to \sigma \neq 0$ für $\frac{1}{x} \to \vartheta$. Damit ist (α) bewiesen und der Beweis von (β) ist auch schon geführt, wenn man so wie oben mit $\vartheta = 0$ operiert.

Wenn z. B. $z(t) = t$, so ist

$$\mu_k = \int\limits_0^1 t^k\,dt = \frac{1}{k+1}$$

und

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots \quad = -\frac{\log(1-x)}{x}$$

genügt offenbar den Bedingungen (α) und (β).

9. Um diesen Hilfssatz zu verwerten, benötigen wir auch die Funktion

(11) $$\Phi(s) = \int_0^1 t^s \, dz(t) \quad \text{für} \quad \Re s > 0 \text{[15]}.$$

Wir beweisen zunächst kurz, daß $\Phi(s)$ *in der Halbebene* $\Re s > 0$ *analytisch und regulär ist.*

In der Tat sei $s = \sigma + i\lambda$ fest $(\sigma > 0)$ und $0 < |h| < \frac{\sigma}{2}$. Es ist

$$\frac{\Phi(s+h) - \Phi(s)}{h} - \int_0^1 t^s \lg t \, dz(t) = \int_0^1 \left(\frac{t^h - 1}{h} - \lg t\right) t^{\sigma + i\lambda} dz(t),$$

also

$$\left| \frac{\Phi(s+h) - \Phi(s)}{h} - \int_0^1 t^s \lg t \, dz(t) \right| \leqq \int_0^1 \left| \frac{t^h - 1}{h} - \lg t \right| \cdot t^\sigma dz(t).$$

Für $0 < t \leqq 1$ ist aber

$$\left| \frac{t^h - 1}{h} - \lg t \right| = \left| \frac{e^{h \lg t} - 1}{h} - \lg t \right| = \left| \frac{h}{2!} \lg^2 t + \frac{h^2}{3!} \lg^3 t + \ldots \right|$$

$$\leqq |h| \lg^2 t \left(1 + \frac{|h|}{1!} \lg \frac{1}{t} + \frac{|h|^2}{2!} \lg^2 \frac{1}{t} + \ldots \right) = |h| \lg^2 t \, e^{|h| \lg \frac{1}{t}}$$

$$= |h| \cdot t^{-|h|} \lg^2 t \leqq |h| \cdot t^{-\frac{\sigma}{2}} \lg^2 t,$$

weil

$$|h| < \frac{\sigma}{2}.$$

Also ist

$$\left| \frac{\Phi(s+h) - \Phi(s)}{h} - \int_0^1 t^s \lg t \, dz(t) \right| \leqq |h| \cdot \int_0^1 t^{\frac{\sigma}{2}} \lg^2 t \, dz(t)$$

und für $h \to 0$ erhält man $\Phi'(s) = \int_0^1 t^s \lg t \, dz(t)$ und $\Phi(s)$ ist regulär nach dem Satz von Goursat.

Aus (11) *folgt auch sofort* $|\Phi(s)| \leqq 1$.

Diese Funktion besitzt auch noch folgende Eigenschaft:

---

[15] $t^s = e^{s \lg t}$, $\lg t$ reell.

Für $\sigma \to +0$ strebt $\Phi(\sigma + i\lambda)$ gegen einen Grenzwert, den wir mit $\Phi(i\lambda)$ bezeichnen, und zwar gleichmäßig für $-\infty < \lambda < +\infty$, $\Phi(i\lambda)$ ist also eine stetige Funktion von λ.

Zum Beweis definieren wir

$$\Phi(i\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} t^{i\lambda}\, dz(t) = \int_{0}^{1} t^{i\lambda}\, dz(t) \tag{11'}$$

als konvergentes uneigentliches Stieltjesintegral. Für den Augenblick wollen wir mit $z_1(t)$ die Funktion bezeichnen, die gleich $z(t)$ für $0 < t \leqq 1$ aber $z_1(0) = z(+0)$ (Abkürzung für $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} z(\varepsilon)$). Es ist dann auch

$$\Phi(i\lambda) = \int_0^1 t^{i\lambda}\, dz_1(t), \qquad \Phi(\sigma + i\lambda) = \int_0^1 t^{\sigma + i\lambda}\, dz_1(t) \quad \text{für} \quad \sigma > 0$$

und also

$$\begin{aligned} |\Phi(\sigma + i\lambda) - \Phi(i\lambda)| &= \left|\int_0^1 t^{\sigma+i\lambda}\, dz_1(t) - \int_0^1 t^{i\lambda}\, dz_1(t)\right| \\ &= \left|\int_0^1 (t^{\sigma} - 1)\, t^{i\lambda}\, dz_1(t)\right| \leqq \int_0^1 (1 - t^{\sigma})\, dz_1(t) \end{aligned}$$

eine von λ unabhängige Schranke, welche für $\sigma \to 0$ auch gegen Null strebt, weil $z_1(t)$ für $z = 0$ stetig ist.

Es gilt also die Darstellung (11) in der ganzen Halbebene auch für $\sigma = 0$, aber in diesem Fall ist das Integral im Sinne $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}$ zu nehmen.

Für $s = 0$ ist also

$$\Phi(0) = z(1) - z(+0) = 1 - z(+0),$$

so daß $\Phi(0) = 1$ notwendig und hinreichend für die Stetigkeit von $z(t)$ an der Stelle $t = 0$ ist.

10. Wir wollen auch die Bedingungen für die Stetigkeit von $z(t)$ für $0 < t \leqq 1$ mit Hilfe der Funktion $\Phi(s)$ ausdrücken.

Die Bedingung (α) des Hilfssatzes I benutzt die Werte von $f(x)$ für Argumente x, die außerhalb des Konvergenzbereiches $|x| < 1$ von (10) liegen, und wir werden zum Ziel gelangen, wenn wir die analytische Fortsetzung des Funktionselementes (10) mit Hilfe von $\Phi(s)$ ausführen.

Nach (10) und (11) ist

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n)\, x^n$$

und da $\Phi(s)$ für $\Re s > 0$ regulär und daselbst absolut $\leqq 1$ ist, so kann man hier einen allgemeineren Satz von Le Roy und Lindelöf benützen, den ich dem Buch „Calcul des Résidus“[16]) von Herrn Lindelöf entnehme

[16]) Paris 1905, S. 109—112, insbesondere Formel (4) auf S. 111. — Was dort $\varphi(z)$ ist, heißt hier $\Phi(z)$ und in unserem Spezialfall ist $\vartheta = 0$ und $m = 1$ zu nehmen.

und erhält sofort die Darstellung

$$f(x) = 1 + \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\Phi(z)\, x^z}{1 - e^{2\pi i z}}\, dz \qquad (0 < \alpha < 1)$$

für $|x| > 0$ und $0 < \operatorname{arc} x < 2\pi$, $(x^z = e^{z \lg x},\ \lg x = \lg |x| + i \operatorname{arc} x)$.

Da $\Phi(\sigma + i\lambda)$ gleichmäßig in λ gegen $\Phi(i\lambda)$ strebt, für $\sigma \to 0$, so dürfen wir in dieser Formel den Integrationsweg $\Re z = \alpha$ mit der imaginären Achse vertauschen und erhalten

$$f(x) = 1 + \int\limits_{-\infty i}^{\infty i}{}' \frac{\Phi(z)\, x^z}{1 - e^{2\pi i z}}\, dz \tag{12}$$

in demselben Bereich für x, wobei der Strich am Integral andeuten soll, daß wir den Pol im Nullpunkt längs des Halbkreises

$$z = \varkappa e^{i\omega}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2} \qquad (0 < \varkappa < 1)$$

umgehen.

Das Integral (12) konvergiert natürlich absolut, wie man sofort einsieht, weil wir $0 < \operatorname{arc} x < 2\pi$ festgesetzt haben.

11. Es sei nun $x = r e^{i\vartheta}$, r fest $1 \leqq r < \infty$ und $0 < \vartheta < 2\pi$. Dann ist

$$\lim_{\vartheta \to +0} \frac{|x - r|}{\vartheta} = r$$

und die Bedingung (α) von Hilfssatz I ist mit

$$\lim_{\vartheta \to +0} \vartheta \cdot f(r e^{i\vartheta}) = 0 \tag{13}$$

gleichwertig.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z)\, x^z}{1 - e^{2\pi i z}}$$

und dann folgt aus (12)

$$\vartheta f(r e^{i\vartheta}) = \vartheta + \vartheta \cdot \int\limits_{-\infty i}^{-\varkappa i} \varphi(z)\, dz + \vartheta \cdot \int\limits_{\text{n.d. Halbkreis}} \varphi(z)\, dz + \vartheta \cdot \int\limits_{\varkappa i}^{\infty i} \varphi(z)\, dz. \tag{14}$$

Wir wollen die zwei ersten Integrale abschätzen:

$$\left| \int\limits_{-\infty i}^{-\varkappa i} \varphi(z)\, dz \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{-\varkappa} \frac{\Phi(i\lambda)\, e^{-\lambda\vartheta + i\lambda \lg r}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}\, d\lambda \right| = \left| \int\limits_{\varkappa}^{\infty} \frac{\Phi(-i\lambda)\, e^{\lambda\vartheta - i\lambda \lg r}}{1 - e^{2\pi\lambda}}\, d\lambda \right|$$

$$\leqq \int\limits_{\varkappa}^{\infty} \frac{e^{\vartheta\lambda}}{e^{2\pi\lambda} - 1}\, d\lambda < \int\limits_{\varkappa}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi}{2}\lambda}}{e^{2\pi\lambda} - 1}\, d\lambda \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

also eine von ϑ unabhängige Schranke.

Für $x = r e^{i\vartheta}$, $z = \varkappa e^{i\omega}$ ist $|x^z| = e^{\varkappa(\lg r \cdot \cos\omega - \vartheta \sin\omega)}$ also, für unsere Werte von r und ϑ ist

$$|x^z| \leqq e^{\varkappa(\lg r + \vartheta)}.$$

Folglich ist

$$\left| \int\limits_{\text{n. d. Hkr.}} \varphi(z)\, dz \right| = \int\limits_{\text{n. d. Hkr.}} \frac{e^{\varkappa\left(\lg r + \frac{\pi}{2}\right)}}{|1 - e^{2\pi i z}|} \cdot |dz| \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

wieder eine von ϑ unabhängige Schranke.

Aus (14) folgt also (13), wenn auch das letzte Glied auf der rechten Seite von (14) für $\vartheta \to 0$ gegen Null strebt, also

$$\lim_{\vartheta \to +0} \vartheta \int\limits_{\varkappa}^{\infty} \frac{\Phi(i\lambda)\, e^{-\lambda\vartheta + i\lambda \lg r}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}\, d\lambda = 0.$$

Wir ersetzen λ durch $\frac{\lambda}{\vartheta}$ und haben

$$\left| \vartheta \int\limits_{\varkappa}^{\infty} \frac{\Phi(i\lambda)\, e^{-\lambda\vartheta + i\lambda \lg r}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}\, d\lambda \right| = \left| \int\limits_{\vartheta\varkappa}^{\infty} \frac{\Phi\left(i\frac{\lambda}{\vartheta}\right) e^{-\lambda + i\frac{\lambda}{\vartheta}\lg r}}{1 - e^{-2\pi\frac{\lambda}{\vartheta}}}\, d\lambda \right| \leqq \int\limits_{\varkappa\vartheta}^{\infty} \frac{\left|\Phi\left(i\frac{\lambda}{\vartheta}\right)\right| e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\pi\varkappa}}\, d\lambda$$

$$\leqq \frac{1}{1 - e^{-2\pi\varkappa}} \int\limits_{0}^{\infty} \left| \Phi\left(i\frac{\lambda}{\vartheta}\right) \right| e^{-\lambda}\, d\lambda.$$

In dieser letzten Schranke ist r ganz fortgefallen, so daß die Bedingung (α) des Hilfssatzes gewiß erfüllt ist, wenn $\left(k = \frac{1}{\vartheta}\right)$

$$(15) \qquad \lim_{k \to \infty} \int\limits_{0}^{\infty} |\Phi(i\lambda k)|\, e^{-\lambda}\, d\lambda = 0.$$

Wir wollen der Gleichung (15) eine bequemere Form geben.

Aus $|\Phi(i\lambda)| \leqq 1$ folgt, daß das uneigentliche Integral in (15) gleichmäßig in bezug auf k konvergiert, so daß zum Bestehen von (15) hinreichend ist, daß

$$\int\limits_{0}^{l} |\Phi(i\lambda k)|\, e^{-\lambda}\, d\lambda \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty,$$

für jeden festen Wert von $l > 0$ und diese letzte Bedingung ist auch mit

$$\int\limits_{0}^{l} |\Phi(i\lambda k)|\, d\lambda \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty,$$

gleichwertig.

Wir ersetzen im letzten Integral λ durch $\frac{\lambda}{k}$ und erhalten

$$\frac{1}{k} \int\limits_{0}^{lk} |\Phi(i\lambda)|\, d\lambda \to 0$$

und wenn wir $l k = x$ setzen

$$\frac{l}{x}\int_0^x |\Phi(i\lambda)|\,d\lambda \to 0,$$

also endlich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x |\Phi(i\lambda)|\,d\lambda = 0, \tag{16}$$

eine Bedingung, welche verlangt, daß $|\Phi(i\lambda)|$ im Mittel gegen Null konvergiere.

Wir bemerken nun, daß die Funktion $\Phi(s)$ nach (11) den Gleichungen

$$\Phi(n) = \mu_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

genügt und da noch

$$|\Phi(s)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad \Re s > 0,$$

so folgt nach einem allgemeinen Satze[17]), daß die analytische Funktion $\Phi(s)$ durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt ist. Wir erhalten zusammenfassend, indem wir Satz II heranziehen, den

Satz III. *Für die Zahlen* $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}$ (1) *der Strecke* $0 \dots, 1$ *mögen die Grenzwerte*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{1n}^k + x_{2n}^k + \dots + x_{nn}^k}{n} = \mu_k \tag{4}$$

für $k = 1, 2, 3, \dots$ *vorhanden sein.*

Es existiert eine eindeutig bestimmte für $\Re s > 0$ *reguläre und beschränkte Funktion* $\Phi(s)$, *welche den Bedingungen*

$$\Phi(n) = \mu_n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

genügt.

Wenn $z(t)$ *die Lösung* $(z(0) = 0)$ *des Momentenproblems*

$$\int_0^1 t^k\,dz(t) = \mu_k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots; \ \mu_0 = 1) \tag{4'}$$

bedeutet, so ist

$$\Phi(s) = \int_0^1 t^s\,dz(t), \qquad \Re s > 0$$

eine Darstellung der Funktion $\Phi(s)$.

Es existiert

$$\lim_{\sigma\to+0} \Phi(\sigma + i\lambda) = \Phi(i\lambda) \qquad (s = \sigma + i\lambda)$$

gleichmäßig für $-\infty < \lambda < \infty$.

---

[17]) Vgl. G. H. Hardy, „On two theorems of F. Carlson und S. Wiegert", Acta Math. 42, S. 327—339.

Die Zahlen (1) *verteilen sich gewiß asymptotisch stetig, wenn*

(17)
$$\Phi(0)=1 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x |\Phi(i\lambda)|\,d\lambda = 0.$$

Die entsprechende Verteilungsfunktion ist $z(t)$, *welches nach den Bedingungen* (17) *notwendig stetig ist.*

Wenn wir in der Formel (11′) von **9** die Substitution $x=\lg\frac{1}{t}$ ausführen, so erhalten wir ein Integral, mit dessen Hilfe wir das Ergebnis (16) auch so ausdrücken können:

Es sei $\psi(x)$ *eine für* $x\geqq 0$ *monotone Funktion, welche für* $x\to\infty$ *endlich bleibt, und*

$$\varrho(\lambda)=\left|\int_0^\infty e^{i\lambda x}\,d\psi(x)\right|,$$

wenn

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \varrho(\lambda)\,d\lambda = 0,$$

dann ist die Funktion $\varphi(x)$ *gewiß für* $x\geqq 0$ *auch stetig*[18]).

§ 3.

Kriterien für asymptotische stetige Verteilung mit Hilfe der Fouriermomente ω_k.

12. In diesem Paragraphen beweisen wir den weiter unten angeführten Satz IV.

Wir beginnen mit dem Beweis eines Hilfssatzes.

Es sei $z_0(t)$ eine für $0\leqq t\leqq 2\pi$ nie abnehmende Funktion und

(18)
$$\omega_k'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,dz_0(t).$$

Wir betrachten die schon von Herrn G. Herglotz[19]) benutzte Funktion

(19)
$$F(x)=\omega_0'+2\omega_1'x+2\omega_2'x^2+\dots.$$

Diese Potenzreihe konvergiert für $|x|<1$, und man findet leicht aus (18) und (19) die Darstellung

[18]) Unter leicht einschränkenden Nebenbedingungen kann man diesen Satz auch für die ganze reelle Achse ($-\infty<x<\infty$) ausdehnen.

[19]) „Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis", Sächsische Sitzungsberichte **63** (1911), S. 501–511.

$$(20)\qquad F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+x}{e^{it}-x}\,d\,z_0(t)\qquad |x|<1,$$

ein verallgemeinertes Poissonsches Integral.

Hilfssatz II. *Für* $0<\vartheta<2\pi$ *und fest ist*

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\,F(r\,e^{i\vartheta})=\frac{1}{\pi}\{z_0(\vartheta+0)-z_0(\vartheta-0)\}$$

und $(\vartheta=0)$

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\,F(r)=\frac{1}{\pi}\{z_0(+0)-z_0(0)+z_0(2\pi)-z_0(2\pi-0)\}.$$

Aus (20) folgt

$$(1-r)\,F(r\,e^{i\vartheta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(t-\vartheta)}+r}{e^{i(t-\vartheta)}-r}\cdot(1-r)\,dz_0(t),$$

und daraus folgen die Gleichungen des Hilfssatzes II nach ähnlichen Schlüssen, wie sie in 8 zum Beweis des Hilfssatzes I verwendet wurden. Die Sache ist derart einfach, daß wir dabei nicht mehr verweilen.

Insbesondere gilt:

Damit $z_0(t)$ *für* $0\leqq t\leqq 2\pi$ *auch stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$(21)\qquad \lim_{r\to 1}(1-r)\,F(r\,e^{i\vartheta})=0$$

für jedes feste ϑ *mit* $0\leqq\vartheta<2\pi$.

Ein bekannter Satz über Potenzreihen lautet folgendermaßen:

Die Koeffizienten der Potenzreihe

$$\varphi(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu x^\nu$$

mögen der Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}=0$ *genügen. Dann ist dieselbe für* $|x|<1$ *gewiß konvergent* und

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\,\varphi(r)=0.$$

Indem wir diesen Satz auf die Potenzreihe (19) anwenden, folgt, daß (21) gewiß dann erfüllt ist, wenn

$$(22)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{|\omega_1'|+|\omega_2'|+\cdots+|\omega_n'|}{n}=0,$$

und *aus* (22) *folgt also a fortiori die Stetigkeit von* $z_0(t)$ *für* $0\leqq t\leqq 2\pi$.

Um zu unserer ursprünglichen Aufgabe zu gelangen, gehen wir wieder von den Zahlen (1) und den Gleichungen (5) in 2 aus. Wir sahen in 7, daß, wenn (5) vorhanden sind, sich das Momentenproblem (4′) und also auch (5′) durch eine monotone (nie abnehmende) Funktion $z(t)$ lösen läßt. Aus (5′) folgt

$$\frac{\overline{\omega}_k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,dz\left(\frac{t}{2\pi}\right) = \omega_k',$$

wenn wir $z_0(t) = z\left(\frac{t}{2\pi}\right)$ setzen, und wenn wir nun das Ergebnis (22) mit dem Satz II verbinden, so folgt, *daß*

$$(23) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|\omega_1| + |\omega_2| + \ldots + |\omega_n|}{n} = 0$$

hinreichend für die asymptotische stetige Verteilung der Zahlen (1) *ist.*

Wir werden weiter noch beweisen, daß die Bedingung (23) auch notwendig ist.

13. Es sei $f(t)$ eine für $-\infty < t < \infty$ erklärte reelle Funktion mit der Periode 2π und in $0 \leqq t \leqq 2\pi$ von beschränkter Schwankung.

Es seien a_k und b_k die Fourierkoeffizienten von $f(t)$. Herr F. Riesz[20]) zeigt an einem Beispiel, daß für eine solche auch noch überall stetige Funktion $f(t)$ nicht notwendig

$$(24) \qquad \lim_{n\to\infty} n\,a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} n\,b_n = 0$$

zugleich gelten.

Herr L. Neder[21]) beweist aber umgekehrt, daß aus unseren ersten Voraussetzungen für $f(t)$ und (24) auch die Stetigkeit von $f(t)$ folgt, oder genauer, daß $f(t)$ nur hebbare Unstetigkeiten aufweisen kann.

In einer neueren Arbeit hat Herr S. Sidon[22]) bewiesen, daß, wenn unser $f(t)$ auch stetig ist, zwar nicht (24), aber gewiß

$$(25) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|a_1| + 2|a_2| + \ldots + n|a_n|}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|b_1| + 2|b_2| + \ldots + n|b_n|}{n} = 0$$

gelten müssen.

Wir wollen in diesem Zusammenhang zunächst beweisen, daß auch umgekehrt die Bedingungen (25) hinreichend für die Stetigkeit (hebbare Unstetigkeiten ausgenommen) von $f(t)$ sind.

---

[20]) a. a. O.

[21]) a. a. O.

[22]) a. a. O.

In der Tat sei

$$\omega_k' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,d f(t).$$

Es folgt durch partielle Integration $(f(0) = f(2\pi)!)$

$$\omega_k' = \frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt = \frac{i}{2}\,(k a_k - i k b_k) \tag{26}$$

und

$$|\omega_k'| \leqq |k a_k| + |k b_k|,$$

so daß aus (25) auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\omega_1'| + \dots + |\omega_n'|}{n} = 0$$

folgt. Wenn wir

$$F(x) = \omega_0' + 2\omega_1' x + 2\omega_2' x^2 + \dots$$

setzen, so folgt aus der letzten Limesgleichung und einem schon benutzten Satz, daß

$$\lim_{r\to 1}\,(1-r)\,F(r e^{i\vartheta}) = 0 \tag{27}$$

für $0 \leqq \vartheta < 2\pi$. Es ist aber $f(t)$ von beschränkter Schwankung, also können wir setzen

$$f(t) = z_1(t) - z_2(t), \tag{28}$$

wo z_1 und z_2 für $0 \leqq t \leqq 2\pi$ nie abnehmen.

Es seien $F_1(x)$ und $F_2(x)$ die der Funktion $F(x)$ analogen, mit den Momenten von $z_1(t)$ bzw. $z_2(t)$ gebildeten Funktionen. Nach (28) folgt

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x),$$

und aus (27) erhält man

$$\lim_{r\to 1}\,(1-r)\,F_1(r e^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1}\,(1-r)\,F_2(r e^{i\vartheta}) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \vartheta < 2\pi.$$

Nach dem Hilfssatz II ist also für $0 < \vartheta < 2\pi$

$$z_1(\vartheta + 0) - z_1(\vartheta - 0) = z_2(\vartheta + 0) - z_2(\vartheta - 0),$$

also nach (28)

$$f(\vartheta + 0) = f(\vartheta - 0).$$

Für $\vartheta = 0$ folgt

$$\begin{aligned} &z_1(+0) - z_1(0) + z_1(2\pi) - z_1(2\pi - 0) \\ &= z_2(+0) - z_2(0) + z_2(2\pi) - z_2(2\pi - 0), \end{aligned}$$

was nach $f(0)=f(2\pi)$ und (28) auf

$$f(+0)=f(2\pi-0)$$

herauskommt.

Die Funktion $f(t)$ kann also nur hebbare Unstetigkeiten aufweisen.

14. Wir können aus dem Satze von Herrn Sidon sehr leicht die Behauptung von **12** ableiten, welche aussagt, daß (23) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die asymptotische stetige Verteilung der Zahlen (1) ist.

In der Tat, wenn $z(t)$ die stetige Verteilungsfunktion ist, so ist auch das dortige $z_0(t)=z\left(\frac{t}{2\pi}\right)$ stetig für $0\leqq t\leqq 2\pi$.

$$f(t)=z_0(t)-\frac{1}{2\pi}t$$

ist stetig und von beschränkter Schwankung für $0\leqq t\leqq 2\pi$. Außerdem ist $f(0)=f(2\pi)$. Unter diesen Voraussetzungen ist ω_k' in (18) mit dem ω_k' in (26) identisch, also

$$|\omega_k'|\leqq|k a_k|+|k b_k| \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

und da $f(t)$ stetig ist, so folgt nach den Sidonschen Gleichungen (25) auch (22) und folglich auch (23).

Zusammenfassend erhalten wir den folgenden

Satz IV. *Notwendig und hinreichend für die asymptotische stetige Verteilung* mod 1 *der Zahlen* $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *ist die Existenz der Grenzwerte*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2\pi i k x_{1n}}+e^{2\pi i k x_{2n}}+\ldots+e^{2\pi i k x_{nn}}}{n}=\omega_k \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

mit der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\omega_1|+|\omega_2|+\ldots+|\omega_n|}{n}=0.$$

§ 4.

Eine Anwendung des Satzes II.

15. Es seien

$$x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$$

n Zahlen der Strecke $0\ldots 1$, die sich für $n\to\infty$ asymptotisch stetig nach $z(x)$ verteilen mögen.

Wenn $\psi(x)$ irgendeine Verteilungsfunktion ist, so folgt sofort aus Satz I, daß sich die Zahlen

$$\psi(x_{1n}), \psi(x_{2n}), \ldots, \psi(x_{nn})$$

asymptotisch stetig nach $z(\psi_{-1}(x))$ verteilen, wenn $\psi_{-1}(x)$ die Umkehrungsfunktion von $\psi(x)$ bedeutet. Insbesondere sind die Zahlen $z(x_{1n}), z(x_{2n}), \ldots, z(x_{nn})$ asymptotisch gleichverteilt für $n \to \infty$[23]).

Nicht ganz so selbstverständlich ist die Antwort auf die Frage: *Wie verteilen sich die Zahlen* $\frac{1}{x_{1n}}, \frac{1}{x_{2n}}, \ldots, \frac{1}{x_{nn}}$ mod 1? Man muß natürlich dabei voraussetzen, daß keines der $x_{\nu n}$ verschwindet.

Wir werden zeigen, daß sich diese Zahlen asymptotisch stetig mod 1 *nach der Verteilungsfunktion*

$$z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ z\left(\frac{1}{n}\right) - z\left(\frac{1}{x+n}\right) \right\}$$

verteilen.

Der allgemeinen Methode folgend, wollen wir zunächst zeigen, daß

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_k^* = \int\limits_0^1 e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x) \\ \text{gesetzt, dann} \\ \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{e^{2\pi i \frac{k}{x_{1n}}} + e^{2\pi i \frac{k}{x_{2n}}} + \ldots + e^{2\pi i \frac{k}{x_{nn}}}}{n} = \omega_k^* \end{array} \right.$$

ist. Wir bemerken, daß diese Behauptung nicht direkt aus Satz I für $f(x) = e^{2\pi i \frac{k}{x}}$ folgt, denn diese Funktion ist in ihrem Real- und Imaginärteil von unbeschränkter Schwankung. Darum muß man etwas vorsichtig sein.

Es sei $\delta > 0$ und < 1, genügend klein, so daß $z(\delta) < 1$. Es sei m_δ die Anzahl derjenigen Zahlen $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$, welche der Strecke $0 \ldots \delta$ angehören, und wir setzen $m_\delta' = n - m_\delta$ für die Anzahl der übrigen Zahlen.

Es sei $\varepsilon > 0$ genügend klein, so daß $z(\delta) + \varepsilon < 1$, dann folgt aus $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{m_\delta}{n} = z(\delta)$, daß $\frac{m_\delta}{n} < z(\delta) + \varepsilon$ für $n > n_0(\delta, \varepsilon)$.

Da $z(\delta) + \varepsilon < 1$, so folgt $\frac{m_\delta}{n} < 1$, also $m_\delta' > 0$ für diese Werte von n. Wir haben ferner

[23]) Ich möchte in diesem Zusammenhang bemerken, daß wenn eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ von Zahlen der Strecke $0 \ldots 1$ gegeben ist, welche diese Strecke überall dicht bedeckt, man immer in passender Weise die Zahlen dieser Folge umordnen kann, so daß die umgeordnete Folge sich nach einer a priori beliebig gegebenen Verteilungsfunktion verteilt. Vgl. hierzu J. v. Neumann, Gleichmäßig dichte Zahlenfolgen (ungarisch), Mathematikai és Physikai Lapok 32.

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i \frac{k}{x_{\nu n}}} - \frac{1}{m'_\delta}\sum_{\delta < x_{\nu n}} e^{2\pi i \frac{k}{x_{\nu n}}} = \frac{1}{n}\sum_{x_{\nu n} \leqq \delta} + \frac{1}{n}\sum_{\delta < x_{\nu n}} - \frac{1}{m'_\delta}\sum_{\delta < x_{\nu n}}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{x_{\nu n} \leqq \delta} - \frac{m_\delta}{n}\cdot\frac{1}{m'_\delta}\sum_{\delta < x_{\nu n}},$$

also

$$(30) \qquad \left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i \frac{k}{x_{\nu n}}} - \frac{1}{m'_\delta}\sum_{\delta < x_{\nu n}} e^{2\pi i \frac{k}{x_{\nu n}}}\right| \leqq \frac{m_\delta}{n} + \frac{m_\delta}{n} < 2(z(\delta) + \varepsilon)$$

für $n > n_0(\delta, \varepsilon)$.

Man sieht nun, daß sich die Zahlen $x_{1n}, \ldots, x_{nn}$, welche der Strecke $\delta \ldots 1$ angehören, auf dieser Strecke asymptotisch nach der Funktion $\frac{z(x) - z(\delta)}{1 - z(\delta)}$ verteilen.

Es ist klar, was wir darunter verstehen, und daß der Satz I auch für ein solches von $0 \ldots 1$ verschiedenes Intervall gilt. Daraus folgt

$$(31) \qquad \left|\frac{1}{m'_\delta}\sum_{\delta < x_{\nu n}} e^{2\pi i \frac{k}{x_{\nu n}}} - \frac{1}{1 - z(\delta)}\int_\delta^1 e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x)\right| < \varepsilon$$

für $n > n_1(\delta, \varepsilon)$ $(n_1 > n_0)$.

Endlich ist für ein genügend kleines $\delta < \delta_0(\varepsilon)$

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x) - \frac{1}{1 - z(\delta)}\int_\delta^1 e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x)\right| < \varepsilon.$$

Aus dieser Ungleichung in Verbindung mit (30) und (31) folgt

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i \frac{k}{x_{\nu n}}} - \int_0^1 e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x)\right| < 2(z(\delta) + \varepsilon) + 2\varepsilon$$

für $\delta < \delta_0(\varepsilon)$ und $n > n_1(\delta, \varepsilon)$

und (29) ist bewiesen.

16. Wir müssen also jetzt aus den Gleichungen

$$(32) \qquad \int_0^1 e^{2\pi i k x} dz^*(x) = \int_0^1 e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Funktion $z^*(x)$ bestimmen.

Wir könnten hier nach Satz IV beweisen, daß $z^*(x)$ stetig ist, aber alles ist hier überflüssig, denn man kann leicht nachrechnen, daß

$$(33) \qquad z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ z\left(\frac{1}{n}\right) - z\left(\frac{1}{n+x}\right) \right\}^{24)}$$

diesen Gleichungen genügt. In der Tat ist

$$\int_0^1 e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 e^{2\pi i k y} dz\left(\frac{1}{n+y}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 e^{2\pi i k y} d\left\{ z\left(\frac{1}{n}\right) - z\left(\frac{1}{n+y}\right) \right\} = \int_0^1 e^{2\pi i k y} dz^*(y)^{25)},$$

also (32) ist bewiesen.

Wenn wir insbesondere von asymptotisch gleichverteilten Zahlen ausgehen, also $z(x) = x$, so folgt aus (33)

$$z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = c + \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt.$$

Nach dieser Funktion verteilen sich also die Zahlen

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n} \bmod 1^{26)},$$

denn die inversen Zahlen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ sind asymptotisch gleichverteilt.

Für $z(x) = x^k$ (k ganz > 1) folgt, daß sich die Zahlen

$$\sqrt[k]{\frac{n}{1}}, \sqrt[k]{\frac{n}{2}}, \ldots, \sqrt[k]{\frac{n}{n}} \bmod 1$$

nach der Funktion

$$z_k^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^k}{dx^k} \log \Gamma(x+1)$$

verteilen.

§ 5.

Anwendung auf die Verteilung der Zahlen $\frac{\varphi(1)}{1}, \frac{\varphi(2)}{2}, \frac{\varphi(3)}{3}, \ldots$.[27]

17. In diesem letzten Teil wollen wir als Anwendung des Satzes III beweisen, *daß sich diese Zahlenfolge asymptotisch stetig auf der Strecke* $0 \ldots 1$ *verteilt.*

---

[24]) Diese Reihe hat nicht negative Glieder und konvergiert gleichmäßig für $0 \leqq x \leqq 1$; denn $1 = \sum \left\{ z\left(\frac{1}{n}\right) - z\left(\frac{1}{n+1}\right) \right\}$ ist eine Majorante.

[25]) Man darf Summation und Integration vertauschen, was nach partieller Integration sofort folgt.

[26]) Vgl. G. Pólya a. a. O.

[27]) Das Symbol $\varphi(n)$ bedeutet die Eulersche Funktion.

Wir beginnen mit einer ersten Verteilungseigenschaft dieser Folge: *Sie bedeckt überall dicht die Strecke* $0 \ldots 1$.

Der Beweis ist ganz einfach. Es ist $\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ und es genügt also zu zeigen, daß die Zahlen der Gestalt

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

($p_1, p_2, \ldots, p_r$ sind verschiedene Primzahlen in irgendwelcher Anzahl), die Strecke $0 \ldots 1$ überall dicht bedecken.

Die Funktion $\log x$ ist für $x \geqq 1$ stetig und darum genügt es zu diesem Zweck zu zeigen, daß man mit den beliebigen endlichen Teilsummen, die mit Gliedern aus der Folge

$$\log\frac{2}{1},\ \log\frac{3}{2},\ \log\frac{5}{4},\ \log\frac{7}{6},\ \ldots,\ \log\frac{p}{p-1},\ \ldots$$

gebildet sind, die positive Halbachse überall dicht bedecken kann. Das folgt aber sofort aus der Divergenz der Reihe $\sum_p \log\frac{p}{p-1}$, denn wenn $x > \varepsilon > 0$ fest gegeben sind, so ist $0 < \log\frac{p}{p-1} < \varepsilon$ für $p \geqq q$ und mindestens eine Teilsumme der Reihe

$$\sum_{p \geqq q} \log\frac{p}{p-1}$$

fällt zwischen $x - \varepsilon$ und $x + \varepsilon$, denn die Reihe divergiert und ihre Glieder sind positiv und kleiner als ε.

18. Diese Eigenschaft benutzen wir im folgenden nicht, wohl aber einen Satz von Herrn Prof. J. Schur, welchen ich aus seinen Vorlesungen vom W.-S. 1923/24 kenne und der aussagt: *Für jeden komplexen Wert von s ist*

$$(34) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{\varphi(1)}{1}\right)^s + \left(\frac{\varphi(2)}{2}\right)^s + \cdots + \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s}{n} = \Phi(s)$$

und $\Phi(s)$ ist ganz transzendent mit der Produktdarstellung

$$(35) \qquad \Phi(s) = \prod_p \left\{1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^s\right\}.$$

p durchläuft alle Primzahlen und das Produkt (35) konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem endlichen Gebiet der s-Ebene.

Wir benutzen diesen Satz nur für positives ganzes $s = k$ und er zeigt uns, daß die Grenzwerte μ_k vorhanden sind und

$$\Phi(k) = \mu_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Außerdem ist für $s = \sigma + i\lambda$ und $\sigma \geqq 0$

$$|\Phi(s)| = \prod_p \left|1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^s\right| \leqq \prod_p \left\{1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^\sigma\right\} \leqq 1$$

und $\Phi(s)$ ist also genau die Funktion des Satzes III.

Die erste Bedingung (17) $\Phi(0) = 1$ ist offenbar erfüllt und man muß nun auch die zweite nachweisen.

Aus

$$\Phi(i\lambda) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-i\lambda \log \frac{p}{p-1}}\right)$$

folgt

$$\log|\Phi(i\lambda)| = \sum_p \log\left|1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}\right|$$
$$= \Re \sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}\right).$$

Für $|x| < 1$ ist $\log(1 - x) = -x + x^2 \cdot \alpha(x)$ $(\lg 1 = 0)$ und für $|x| \leqq \frac{2}{3}$ ist $|\alpha(x)| < 2$. Daraus folgt

$$\Re \sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}\right) = \log\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i\lambda \lg 2}\right| - \Re \sum_{p \geqq 3} \frac{1 - e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}}{p}$$
$$+ \Re \sum_{p \geqq 3} \frac{\left(1 - e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}\right)^2}{p^2} \cdot \alpha\left(\frac{1 - e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}}{p}\right).$$

Für $p \geqq 3$ ist $\left|\frac{1 - e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}}{p}\right| \leqq \frac{2}{3}$ und die letzte Reihe auf der rechten Seite besitzt die von λ unabhängige Majorante $\sum \frac{8}{p^2}$. Also ist

$$\log|\Phi(i\lambda)| = \log\left|\cos \frac{\lambda \lg 2}{2}\right| - 2 \sum_p \frac{1}{p} \sin^2\left(\frac{\lambda}{2} \lg \frac{p}{p-1}\right) + 0(1)$$

und endlich

$$|\Phi(i\lambda)| = \left|\cos \frac{\lambda \lg 2}{2}\right| \cdot e^{-2 \sum_p \frac{1}{p} \sin^2\left(\frac{\lambda}{2} \lg \frac{p}{p-1}\right) + 0(1)} \tag{36}$$

für $-\infty < \lambda < +\infty$.

Die Bedingung (17) des Satzes III ist erfüllt, wenn

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-2 \sum \frac{1}{p} \sin^2\left(\frac{\lambda}{2} \lg \frac{p}{p-1}\right)} d\lambda = 0.$$

Wir ersetzen λ durch $2x$ und dieze Gleichung ist à fortiori erfüllt, wenn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x e^{-\sum_p \frac{1}{p}\sin^2\left(x \lg \frac{p}{p-1}\right)} dx = 0. \tag{37}$$

19. Wir beweisen zunächst: *Die Zahlen der Folge*

$$\lg\frac{2}{1},\ \lg\frac{3}{2},\ \lg\frac{5}{4},\ \ldots,\ \lg\frac{p}{p-1},\ \ldots$$

sind linear unabhängig, das heißt: eine Gleichung

$$\sum c_p \log\frac{p}{p-1} = 0$$

mit ganzen rationalen c_p und wo p endlich viele verschiedene Primzahlwerte durchläuft, ist nur für $c_p = 0$ möglich.

Angenommen es wären nicht alle $c_p = \text{Null}$, dann darf man $c_p \neq 0$ für alle c_p voraussetzen. Die Gleichung der Behauptung kommt auf

$$\prod\left(\frac{p}{p-1}\right)^{c_p} = 1 \quad \text{oder} \quad \prod p^{c_p} = \prod (p-1)^{c_p}$$

hinaus.

Es sei q der größte Primzahlwert von p. Beide Glieder der letzten Gleichung sind rationale Brüche, der erste sogar irreduzibel und q teilt seinen Nenner oder den Zähler.

Dies trifft nicht auch für den rechten Bruch ein und darum ist unsere Annahme absurd.

20. Wir können nun (37) beweisen. Es sei P eine feste Primzahl. Es ist

$$\frac{1}{x}\int_0^x e^{-\sum_p \frac{1}{p}\sin^2\left(x \lg \frac{p}{p-1}\right)} dx \leqq \frac{1}{x}\int_0^x e^{-\sum_{p\leqq P} \frac{1}{p}\sin^2\left(x \lg \frac{p}{p-1}\right)} dx \tag{38}$$

und wir beweisen folgende zwei Behauptungen

1°. *Der Ausdruck auf der rechten Seite von (38) strebt für $x \to \infty$ gegen einen positiven Grenzwert $A^{(P)}$.*

2°. *Es ist* $\lim_{P\to\infty} A^{(P)} = 0$.

Daraus folgt auch (37), denn wenn L den lim sup des Ausdruckes auf der linken Seite von (38) bedeutet, so folgt aus (38) und 1°.

$$L \leqq A^{(P)}$$

und P war beliebig, also nach 2° für $P \to \infty$

$$L = 0$$

also (37).

Wir beginnen mit 1°. Wir betrachten die Fourierentwicklung der Funktion

$$e^{-\frac{1}{p}\sin^2 z} = a_0^{(p)} + 2a_1^{(p)}\cos z + 2a_2^{(p)}\cos 2z + \ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n^{(p)} e^{izn} \quad (a_n^{(p)} = a_{-n}^{(p)})$$

und $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n^{(p)}|$ konvergiert, weil die dargestellte Funktion eine stetige zweite Ableitung besitzt[28]).

Wir ersetzen in dieser Reihenentwickelung z durch $x \log \frac{p}{p-1}$, lassen p die Werte 2, 3, 5, 7, ..., P durchlaufen und multiplizieren miteinander die herauskommenden Gleichungen.

Man erhält auf diese Weise die verallgemeinerte Fourierentwickelung

$$(39) \qquad \psi(x) = e^{-\sum\limits_{p \leqq P} \frac{1}{p} \sin^2\left(x \lg \frac{p}{p-1}\right)} = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{i\lambda_\nu x},$$

wo alle λ_ν untereinander und von 0 verschieden sind[29]).

Aus der Behauptung in **19** über die Unabhängigkeit der Zahlen $\log \frac{p}{p-1}$ folgt

$$(40) \qquad A_0 = a_0^{(2)} a_0^{(3)} a_0^{(5)} \ldots a_0^{(P)}$$

und wir wollen jetzt zeigen, daß gemäß 1°.

$$(41) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \psi(x)\, dx = A_0.$$

In der Tat, $\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|$ ist gewiß konvergent. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann bestimmen wir m mit $\sum_{\nu=m+1}^{\infty} |A_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Es folgt dann aus (39)

$$\left| \psi(x) - A_0 - \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu e^{i\lambda_\nu x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und also

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x \psi(x)\, dx - A_0 - \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \frac{1}{x} \int_0^x e^{i\lambda_\nu x}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

oder

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x \psi(x)\, dx - A_0 - \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \frac{e^{i\lambda_\nu x} - 1}{i\lambda_\nu x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

---

[28]) Vgl. L. Bieberbach, Differential- und Integralrechnung II, S. 81.

[29]) Die Funktion $\psi(x)$ ist fastperiodisch.

und also für genügend großes x $\left|\frac{1}{x}\int\limits_0^x \psi(x)\,dx - A_0\right| < \varepsilon$ und (41) ist bewiesen. Also ist A_0 das $A^{(P)}$ von 1°. Aus (40) wird nun auch 2°. folgen.

Es ist

$$a_0^{(p)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{p}\sin^2 z}\,dz = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{-\frac{1}{p}\sin^2 z}\,dz < 1$$

und die Behauptung 2° ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß das Produkt $\prod\limits_p a_0^{(p)}$ gegen Null divergiert, oder daß die Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_p (1 - a_0^{(p)})$$

divergiert.

Dies folgt nun sofort, denn für $0 \leqq x \leqq 1$ ist $1 - e^{-x} \geqq \frac{x}{2}$ und also

$$\sum_{p \leqq P} (1 - a_0^{(p)}) = \frac{1}{\pi}\sum_{p \leqq P}\int\limits_0^{\pi}\left(1 - e^{-\frac{1}{p}\sin^2 z}\right)dz \geqq \frac{1}{\pi}\sum_{p \leqq P}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^2 z}{2p}\,dz,$$

also

$$\sum_{p \leqq P} (1 - a_0^{(p)}) \geqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin^2 z\,dz \cdot \sum_{p \leqq P}\frac{1}{p}$$

und da $\sum\limits_p \frac{1}{p}$ divergiert, ist alles bewiesen.

(Eingegangen am 7. Juli 1926.)

Zusatz bei der Korrektur (Februar 1928).

Ich nahm erst letztens davon Kenntnis, daß Herr Norbert Wiener[30]) in einer neueren Arbeit den Satz von § 3 schon bewiesen hat, und zwar in einer wenig abweichenden Gestalt.

Er benutzt statt der Sidonschen Bedingungen (25) von § 3 die Limesgleichung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2) = 0, \tag{42}$$

---

[30]) *"The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients"*, Journal of Math. and Phys. Massachusetts **3** (1924), pp. 72–94, insbesondere p. 81.

und zeigt, daß dieselbe *notwendig und hinreichend ist für die Stetigkeit der periodischen Funktion* $f(x)$ *von beschränkter Schwankung, deren Fourier-koeffizienten* a_n *und* b_n *sind.*

Es sind aber $n\,|a_n|$ und $n\,|b_n|$ beschränkt, und die Bedingung (42) erscheint gleichbedeutend mit den Bedingungen (25) infolge des einfachen Satzes:

Es sei

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

eine beschränkte Folge nichtnegativer Zahlen.

Aus

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} = 0 \tag{43}$$

folgt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2}{n} = 0 \tag{44}$$

und umgekehrt.

Beweis. Wir dürfen natürlich $0 \leqq c_n \leqq 1$ annehmen und dann folgt selbstverständlich (44) aus (43).

Die Umkehrung folgt aus der Ungleichung

$$\frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} \leqq \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2}{n}},$$

einer Anwendung der Schwarzschen Ungleichung.

Es genügt nacheinander $n\,|a_n|$ und $n\,|b_n|$ für c_n zu setzen, um unsere obige Behauptung zu bekommen.

Aus demselben Grunde ist die Bedingung des Satzes IV mit der Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 + \ldots + |\omega_n|^2}{n} = 0$$

gleichbedeutend.