

Ein heuristischer Zugang zur allgemeinen Relativitätstheorie¹⁾

Von H. Dehnen, H. Hönl und K. Westpfahl

Mit 1 Abbildung

Inhaltsübersicht

Es wird ein heuristischer Zugang zur allgemeinen Relativitätstheorie angegeben, der unter Vermeidung der Kovariantentheorie die drei bis heute prüfbarsten Einstein-Effekte: Rotverschiebung der Spektrallinien der Sonne, Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne und Perihelbewegung der Planetenbahnen, im Zusammenhang mit dem Einstein-Machschen Prinzip der „Relativität der Trägheit“ quantitativ zu beschreiben gestattet. Abschließend wird ein historisch-kritischer Überblick über die Bedeutung des Machschen Prinzips in der allgemeinen Relativitätstheorie gegeben.

§ 1. Einführung

Die vorliegende Untersuchung beabsichtigt nicht in erster Linie, einen didaktisch bequemen „elementaren“ Zugang zu den Grundvorstellungen und wichtigsten Tatsachen der allgemeinen Relativitätstheorie zu gewinnen; sie versucht vielmehr, durch eine neue Anordnung der Argumente den inneren Zusammenhang des Komplexes der allgemeinen Relativitätstheorie überschaubarer zu machen und auf diesem heuristischen Wege das physikalische Verständnis der Theorie zu erleichtern und womöglich zu vertiefen. Hierbei beschränken wir uns auf die Darstellung der Effekte erster und zweiter Ordnung (Verschiebung der Spektrallinien und Lichtablenkung im Gravitationsfeld, Perihelbewegung der Planetenbahnen). Die exakte Form der allgemeinkovarianten Feldgleichungen des metrischen Feldes ist nicht Gegenstand unserer Überlegungen; es ist im Gegenteil unsere Absicht zu zeigen, wie weit man ohne Benutzung der Kovariantentheorie im Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie — besser gesagt der metrischen Gravitationstheorie — vordringen kann.

Um dieses Ziel zu erreichen, ist es nützlich, von vornherein zwischen „natürlich meßbaren“ und nur „fiktiv“ eingeführten Größen zu unterscheiden. Erstere beziehen sich auf wirklich durchgeführte oder wenigstens im Prinzip mögliche Messungen, gleichgültig ob diese „direkt“ ausführbar sind oder ob das Versuchsergebnis — die Messung einer bestimmten physikalischen Größe — durch Zwischenschaltung einer Anzahl von Schlüssen unter Benutzung physikalischer Gesetze „indirekt“ erhalten wird. Direkte natürliche Messungen

¹⁾ Dem Andenken an Max von Laue gewidmet.

sind das Anlegen eines Maßstabes an einen realen Körper zur Ermittlung seiner Ausdehnung, die Messung eines Zeitintervalls zwischen zwei physikalischen Ereignissen mittels einer ruhend angeordneten Normaluhr, die Bestimmung einer Masse mittels eines Gewichtssatzes oder die Messung einer Geschwindigkeit durch gleichzeitige Benutzung eines Maßstabes und einer Normaluhr. Indirekte natürliche Messungen sind alle Verfahren, welche in bekannter Weise zur Ermittlung von physikalischen Größen — etwa der Naturkonstanten — dienen. Die Möglichkeit der Physik als empirischer Wissenschaft beruht auf der Einstimmigkeit des Ergebnisses verschiedener unabhängiger Methoden. Daß diese Einstimmigkeit prinzipiell erreichbar ist, liegt — abgesehen von der vorauszusetzenden logischen Widerspruchsfreiheit der Theorie — daran, daß alle Messungen auf Eichungen beruhen und alle Eichungen sich letzten Endes auf die Eichung eines Längen-, Zeit- und Massennormals zurückführen lassen (C. G. S.-System). Ein prinzipieller Unterschied zwischen direkt und indirekt durchgeführten natürlichen Messungen besteht also nicht.

Andererseits kann die Physik gewisser fiktiver Vorstellungen nicht entraten. Derartige Fiktionen haben bei der Erweiterung der speziellen zur allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige heuristische Rolle gespielt. Beispielsweise kann der Einfluß von Gravitationsfeldern auf starre Maßstäbe und Normaluhren so beschrieben werden, daß die „Länge“ des Maßstabes und die „Schwingungsdauer“ der Uhr im Gravitationsfeld gewisse „fiktive“ Veränderungen erfahren, welche allen als „starre“ Maßstäbe gekennzeichneten Körpern und allen „Normal“-Uhren in gleicher Weise zukommen. Diese „Veränderungen“ können auf direktem Wege, d. h. durch *natürliche* Messung an dem Orte, an dem sich die Maßstäbe, Uhren usw. befinden (also durch gewöhnliche Laboratoriumsversuche) selbstverständlich nicht festgestellt werden, da alle Meßgeräte denselben Änderungen unterliegen. Dennoch ergeben sich aus derartigen Fiktionen unmittelbar an der Erfahrung prüfbare physikalische Folgerungen. So führt die (fiktive) Annahme, daß die Schwingungsdauer einer Normaluhr (Atom) auf der Oberfläche der Sonne größer sei als die Schwingungsdauer derselben Uhr auf der Erde, zu der experimentell prüfbaren Rotverschiebung der Spektrallinien der Sonne. Ebenso bedeutet die (fiktive) Annahme einer vom Ort abhängigen (nach Maßgabe des Newtonschen Gravitationspotentials veränderlichen) „Länge“ von Maßstäben, daß in dem betreffenden Raumgebiet nicht mehr die Sätze der euklidischen Geometrie gelten; wir haben hierin ein einfaches „Model“, einer nichteuklidischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit vor uns²⁾. Die Vorstellung einer im Gravitationsfeld räumlich variablen Lichtgeschwindigkeit führt unmittelbar (nach dem Prinzip von Huyghens) zur Lichtablenkung im Gravitationsfeld; dennoch würde die „natürlich gemessene“ Lichtgeschwindigkeit an jeder Stelle des Raumes den Normalwert c ergeben.

Diese Beispiele zeigen die Nützlichkeit derartiger Annahmen. Ihr fiktiver Charakter kommt darin zum Ausdruck, daß sich alle Aussagen auf einen

²⁾ Ähnliche „physikalische Modelle“ nicht-euklidischer Geometrien beschreibt H. Poincaré in „Wissenschaft und Hypothese“ (B. G. Teubner 1914, S. 66ff.). Das von uns häufig benutzte Wort „Fiktion“ (bzw. „fiktiv“) wäre im Sinne von Poincarés „Konventionalismus“ etwa mit den Worten „auf Übereinkommen beruhende Festsetzung“ zu übersetzen.

lediglich fiktiv eingeführten euklidischen Vergleichsraum x_1, x_2, x_3 , und eine vom Ort unabhängige fiktive Koordinatenzeit t beziehen. Indem wir im folgenden die spezielle Relativitätstheorie in ihrem Aufbau als bekannt und nicht mehr problematisch voraussetzen, kann der Einfluß von Gravitationsfeldern auf die Geometrie und den Ablauf der Naturvorgänge ohne Einschränkung in der Weise solcher fiktiver Annahmen beschrieben werden. Der Einfluß des Gravitationsfeldes ist dann aber nicht allein auf Maßstäbe und Uhren zu erstrecken, sondern konsequenterweise auf alle physikalischen Größen wie Masse, Ladung, Wirkung usw. auszudehnen.

Da, wie obige Beispiele zeigen, die fiktiv eingeführten Größen unmittelbar zu einer Deutung physikalischer Effekte führen, so ist man versucht, die im Gravitationsfeld veränderten Größen (im folgenden durch * gekennzeichnet) auch „effektiv“ zu nennen. So würde z. B. eine Uhr, welche einige Zeit an einen Ort kleineren Newtonschen Potentials (Sonnenoberfläche) gebracht und dann an den Ausgangsort zurückgebracht worden ist, gegenüber einer Uhr, welche die Reise nicht mitgemacht hat, „effektiv“ nachgehen; der Gang der bewegten Uhr muß also im Zeitmittel langsamer gewesen sein. Wir werden im folgenden, um Mehrdeutigkeit zu vermeiden, von der Bezeichnung „effektiv“ im allgemeinen absehen und nur bei der Diskussion einzelner Ergebnisse (z. B. bei Masse und Ladung) auf sie zurückgreifen.

Eine ausgezeichnete Rolle spielt bei diesen Betrachtungen naturgemäß das Verhalten von Maßstäben, Uhren und Massen, da auf den gemessenen Längen und Zeiten und den durch Versuche festgestellten Massenwerten (Trägheit) der Aufbau der Mechanik seit Newton beruht. Es ist daher zunächst verwunderlich, daß man dem Verhalten der Massen im Gravitationsfeld nicht dieselbe Aufmerksamkeit zugewandt hat wie dem Verhalten von Maßstäben und Uhren. Die Wendung, die wir dem Problem geben möchten, besteht nun darin, daß wir uns die „starren“ Maßstäbe und Normaluhren von vornherein aus elementaren Bestandteilen wie Elektronen, Protonen und Neutronen aufgebaut denken (§ 2), wobei die sämtlichen Konstanten, welche diese Elementarteilchen und ihr physikalisches Verhalten charakterisieren — wie Masse, Ladung, Wechselwirkungskräfte und Wirkungsquantum — fiktiven Veränderungen im Gravitationsfeld unterliegen. Eine notwendige Bedingung für die Durchführbarkeit unseres Verfahrens besteht dann darin, daß das Zusammenwirken der verschiedenen fiktiven Änderungen in sich widerspruchsfrei ist. Darüber hinaus sollen sich fiktive Änderungen der gemessenen Längen und Zeitintervalle ergeben, welche sich jedenfalls in erster Näherung im Sinne des metrischen Linienelements der allgemeinen Relativitätstheorie interpretieren lassen. Da die Form des Linienelementes als exakte Lösung der allgemein-kovarianten Feldgleichungen in einfachen Fällen bekannt ist (z. B. für das zentral-symmetrische Feld), so haben wir hierin ein Kriterium für die Zuverlässigkeit des Verfahrens, an welchem wir nachträglich unsere heuristische Methode prüfen können. Es soll jedoch ausdrücklich gesagt werden, daß — was eigentlich selbstverständlich ist — die Aufstellung allgemein-kovarianter Feldgleichungen durch Einstein und das Aufsuchen von Lösungen derselben dem hier angegebenen Verfahren natürlich weit überlegen ist, was sich schon darin zeigt, daß unsere Methode allein physikalische Effekte erster und allenfalls zweiter Ordnung wiedergeben kann. Da aber diese Effekte an sich schon großes physikalisches Interesse bean-

sprechen (und bisher die einzigen sind, an denen die allgemeine Relativitätstheorie im Bereiche des Planetensystems geprüft werden konnte), so mag man allein hierin eine hinreichende Rechtfertigung für unsere Darstellung erblicken.

Speziell das Problem der Beeinflussung der Masse durch das Gravitationsfeld hängt nun eng mit demjenigen Fragenkomplex zusammen, den man — nach dem Vorgange von A. Einstein — gewöhnlich unter dem Namen „Machsches Prinzip“ zusammenfaßt. Gemäß der von Einstein gegebenen Anwendung des Machschen Prinzips auf die „Relativität der Trägheit“ ponderabler Materie müßte die Masse eines Probekörpers (Planeten) bei Annäherung an große Massenansammlungen (Sonne) zunehmen. Die in § 3 und § 4 durchgeführte Diskussion der Abhängigkeit der Masse vom (statischen) Gravitationsfeld bestätigt diese Vermutung, jedoch ist die Massenzunahme das dreifache des von Einstein angenommenen Betrages. Dieses Ergebnis wird insbesondere durch eine eingehende Analyse der Perihelbewegung der Planeten (Effekt zweiter Ordnung) in § 5 weiter erhärtet werden können. Auf die Diskussion der physikalischen Bedeutung des Machschen Prinzips werden wir erst in § 6 (Schlußbemerkungen) näher eingehen.

Es möge hier in prinzipieller Hinsicht nochmals besonders hervorgehoben werden, daß das angewandte Verfahren der Einführung fiktiver Größen eigentlich nur ein spezielles „Bild“ oder „Modell“ der tatsächlichen Verhältnisse ergibt. Durch ein solches Modell der Realisierung nicht-euklidischer Maßverhältnisse des raumzeitlichen Kontinuums wird z. B. der Einfluß des Gravitationsfeldes auf die Metrik unmittelbar anschaulich gedeutet. Die Beschreibung physikalischer Effekte im Rahmen dieser Vorstellung macht aber andererseits deutlich, daß es sich hierbei nur um einen Notbehelf handelt, durch welchen es gelingt, einen an sich nur in der Begriffssprache einer vollkommeneren Theorie adäquat darstellbaren Sachverhalt in die primitivere Sprache der älteren Theorie zurückzuübersetzen. Beispielsweise hat der Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse nur im Rahmen der Newtonschen Theorie einen unmittelbar verständlichen Sinn; in der allgemeinen Relativitätstheorie ist der diesem Satz entsprechende Sachverhalt in die Grundlagen der Theorie so vollständig aufgegangen, daß die Unterscheidung von träger und schwerer Masse bei der Bewegung eines Probekörpers im Gravitationsfeld gegenstandslos geworden ist. Prinzipiell ist die Einführung fiktiver Größen im Gravitationsfeld als ein einfach zu handhabendes Verfahren anzusehen, einen an sich komplizierteren Zusammenhang in der geläufigeren Ausdrucksweise der einfacheren Newtonschen Theorie — bzw. ihrer Verallgemeinerung in den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen — darzustellen. Man muß sich dabei nur bewußt bleiben, daß diese vereinfachte Ausdrucksweise dem zu beschreibenden Vorgang nicht in jeder Hinsicht vollkommen gerecht werden kann. In diesem Sinne entspricht die Realisierung nicht-euklidischer Maßverhältnisse als Folge fiktiver Veränderungen physikalischer Naturkonstanten ganz jenen anderen „Bildern“, durch welche man die Lorentz-Kontraktion und die Zeitdilatation in der speziellen Relativitätstheorie (auch hier mit Erfolg) zu deuten versucht hat. Solche Bilder haben freilich das Schicksal, bei der endgültigen, aber weitgehend formalen Fassung der Theorie überflüssig zu werden. Sie können jedoch das physikalische Verständnis sehr wohl fördern, weil sie die Motive für die Erweiterung der früheren Theorie unmittelbar aufdecken.

§ 2. Atomare Maßstäbe und Uhren

Die allgemeine Relativitätstheorie untersucht das Verhalten von Maßstäben und Uhren im Gravitationsfeld. Sie nimmt an, daß dieses durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ bestimmt sei. Dabei pflegt man im allgemeinen jedoch mit Stillschweigen darüber hinwegzugehen, welche materiellen Gebilde als „Normal-Längenmaß“ und „Normaluhr“ überhaupt in Betracht kommen. Diese Frage soll uns hier zunächst beschäftigen.

Es ist naheliegend, als Normalmaßstab und Normaluhr ein bestimmtes atomares System, z. B. ein bestimmtes Atom oder Molekül zu benutzen. Da Atome und Moleküle aus denselben wenigen Arten von Elementarteilchen aufgebaut sind, deren Individuen unter sich exakt gleich sind, so sind alle Atome derselben Art (gleiche Isotope) unter sich genau gleich beschaffen. Jedes atomare System repräsentiert sowohl vermöge seiner räumlichen Ausdehnung einen Maßstab als auch vermöge seiner mechanischen Schwingungen oder emittierten Frequenzen (Linienpektrum) eine Uhr. (Es bedeutet dabei grundsätzlich keinen Unterschied, ob wir an Stelle eines Atoms oder Moleküls einen ideal gebauten Kristall als Maßstab verwenden, dessen mechanische Eigenschwingungen zugleich als Uhr benutzt werden können. Auch eine Ammoniak-Uhr oder Caesium-Uhr leistet prinzipiell dasselbe.)

Wir nehmen als Repräsentant der Längeneinheit etwa den Wasserstoffradius a_H . Wir dürfen annehmen, daß sich diese Längeneinheit unter den gleichen physikalischen Bedingungen, z. B. auch bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes, immer wieder reproduzieren wird. Genauer gesagt führen wir mit dieser Annahme ein physikalisches Axiom ein: Wir postulieren, daß sich alle Aussagen über gemessene Längen auf den Wasserstoffradius als Längeneinheit beziehen lassen. Das Entsprechende gilt für gemessene Zeitabschnitte, die sich etwa auf die reziproke Rydberg-Frequenz $1/R$ beziehen mögen. Es soll demnach ausdrücklich als physikalisches Axiom eingeführt werden, daß diese Festsetzung unabhängig von Ort und Zeit gelte und auch die Anwesenheit von Gravitationsfeldern einschließt. Ohne eine derartige Festsetzung hinge der Begriff des „metrischen Feldes“ völlig in der Luft. Sie ist daher auch keine zusätzliche „Hypothese“, da erst durch sie der Begriff des metrischen Feldes einen konkret angebbaren Sinn erhält.

Betrachten wir jetzt neben dem Wasserstoffradius a_H andere elementare Längen, wie die (durch 2π dividierte) Compton-Wellenlänge $a_C = \hbar/2\pi m_e c$ und den Elektronenradius a_e . Diese Größen drücken sich durch die Naturkonstanten e , $\hbar$, c und die Elektronenmasse m_e bekanntlich so aus:

$$a_H = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \quad a_C = \frac{\hbar}{m_e c}, \quad a_e = \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (2.1)$$

Bei Einführung der Feinstrukturkonstanten $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ ergibt sich daher die Proportion

$$a_H : a_C : a_e = 1 : \alpha : \alpha^2. \quad (2.2)$$

Sie bringt zum Ausdruck, daß die genannten Längen alle in der gleichen Weise von m_e abhängen, nämlich umgekehrt proportional zu m_e sind, da m_e in die Feinstrukturkonstante nicht eingeht. Wir müssen aber zulassen, daß die träge Masse m_e des Elektrons von äußeren Feldern, insbesondere auch

vom Gravitationsfeld, abhängt. Gemäß dem Einstein-Machschen Gedanken der „Relativität der Trägheit“ wäre sogar zu fordern, daß m_e zunimmt, wenn sich der „Probekörper“ Elektron einer größeren Massenansammlung nähert. Daher werden auch die als Meßkörper benutzten atomaren Systeme eine „Veränderung“ erfahren (s. Einführung), wenn man sie nacheinander an verschiedene Stellen des Gravitationsfeldes bringt oder ihnen Beschleunigungen auferlegt (gemäß dem Äquivalenzprinzip). Es ist aber grundsätzlich entsprechend zu fragen, ob nicht auch die übrigen Naturkonstanten e , $\hbar$, c ebenfalls bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes verändert werden. Unter der ausdrücklichen Voraussetzung, daß die Feinkonstruktorkonstante $\alpha = e^2/\hbar c$ vom Gravitationsfeld nicht abhängt, folgt daher, daß jede der elementaren Längen gleichermaßen als Maßstab benutzt werden kann. Die über die Feinstrukturkonstante α gemachte Annahme der Unabhängigkeit vom Gravitationsfeld ist aber sehr naheliegend. Denn α ist eine dimensionslose Größe, deren theoretische Begründung wohl ausschließlich in den Bereich der Quantentheorie gehört, mit dem Gravitationsfeld also direkt nichts zu tun hat. Dennoch soll die Frage der Unabhängigkeit ihres Wertes vom Gravitationsfeld einer genaueren Untersuchung unterzogen werden (s. § 3 und § 4).

Wir betrachten ferner in entsprechender Weise die von den atomaren Systemen emittierten Frequenzen. Als Einheit werde die Rydberg-Frequenz

$$R = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^3} \quad (2.3)$$

gewählt. Neben dieser lassen sich andere charakteristische atomare Frequenzen angeben wie: die Übergangswahrscheinlichkeiten A (von der Dimension einer Frequenz) zwischen Energieniveaus bei der Lichtemission, die Frequenzen ν_F bestimmter Feinstrukturkomponenten des Wasserstoffs (cm-Wellen) oder auch die Frequenz $\nu_0 = 2m c^2/h$ der Schrödingerschen Zitterbewegung des Elektrons. Für diese Frequenzen, der Größenordnung nach geordnet, gilt näherungsweise die Proportion:

$$A : \nu_F : R : \nu_0 \simeq \alpha^3 : \alpha^2 : 1 : \alpha^{-2}. \quad (2.4)$$

Alle diese Frequenzen sind direkt proportional zu m_e . Aus der Proportion (2.4) folgt daher bei der genannten Annahme über α , daß alle atomaren Systeme gleichermaßen als Normaluhren geeignet sind, unabhängig von einem etwaigen Einfluß des Gravitationsfeldes.

Die physikalische und astronomische Erfahrung zeigt, daß die Geometrie des Erfahrungsraumes (etwa innerhalb des Sonnensystems) sicher mit guter Annäherung euklidisch ist; ferner ist der Gang der Uhren in derselben Annäherung unabhängig vom Ort. Es entspricht daher gewiß einer guten Annäherung an die tatsächlichen Verhältnisse, wenn wir die Erscheinungen zunächst auf ein cartesisches Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 beziehen und hinsichtlich der Zeit eine Zeitkoordinate t einführen, welche für ein bestimmtes räumliches Koordinatensystem unabhängig vom Ort ist. Diese Aussagen sollen sich auf Maßstäbe und Uhren in dem oben definierten Sinne beziehen. Die Erfahrungen, welche zur Aufstellung der speziellen Relativitätstheorie geführt haben, zeigen nun, daß dem „raumzeitlichen Kontinuum“ $x_1, x_2, x_3, x_4 = c t$ zunächst bei *Ausschluß* von Gravitationsfeldern eine pseudoeuklidische

Metrik durch das Linienelement

$$ds^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + c^2 dt^2 \quad (2.5)$$

aufgeprägt ist. Durch die Forderung der Invarianz des Linienelementes hinsichtlich einer Gruppe linearer homogener Substitutionen der Koordinaten (Lorentz-Transformationen) sowie der Invarianz der Grundgesetze der Mechanik und Elektrodynamik werden damit alle Geschwindigkeitseffekte der speziellen Relativitätstheorie berücksichtigt

Wir wollen uns nun im Sinne der einführenden Überlegungen weiter die folgende Hilfsvorstellung zu eigen machen: Ausgehend von der Raumzeitstruktur der speziellen Relativitätstheorie machen wir die Annahme, daß die atomaren Maßstäbe und Uhren unter dem Einfluß von (statischen) Gravitationsfeldern fiktive „Veränderungen“ erfahren; und zwar derart, daß die relativen Veränderungen in erster Näherung dem Newtonschen Gravitationspotential proportional sind. Damit beziehen wir alle Naturvorgänge auf den fiktiven euklidischen Vergleichsraum x_1, x_2, x_3 und die fiktive Systemzeit t und postulieren entsprechend dem Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie die Existenz eines Linienelementes

$$ds^2 = -f(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + g c^2 dt^2 = -dS^2 + c^2 dT^2, \quad (2.6)$$

wobei die durch direkte „natürliche“ Messungen feststellbaren infinitesimalen Längen und Zeitintervalle durch

$$dS = \sqrt{f(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)} \quad \text{und} \quad dT = \sqrt{g} dt \quad (2.6a)$$

gegeben sind. Sei ohne Gravitationsfeld die Länge eines (infinitesimalen) Maßstabes λ , die Schwingungsdauer einer Normaluhr τ , seien bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes die entsprechenden Größen (bezogen auf den Vergleichsraum) λ^* und τ^* , so ist $f = (\lambda/\lambda^*)^2$, $g = (\tau/\tau^*)^2$ ³⁾, wobei f und g Ortsfunktionen sind, die in einer noch zu bestimmenden Weise vom Gravitationspotential $\gamma = -\Phi/c^2$ (Φ Newtonsches Potential < 0 , $\gamma > 0$) abhängen. (Bei einem zentralsymmetrischen Gravitationsfeld wird $f = f(r)$ und $g = g(r)$ mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$). Gemäß (2.6) wird dem Raum-Zeit-Kontinuum nunmehr eine nichteuklidische Struktur aufgeprägt.

Diese einfachen Überlegungen zeigen bereits, daß prinzipiell alle Naturkonstanten von fiktiven Änderungen betroffen werden. Wären nämlich, wie es die Einstein-Machsche Idee der „Relativität der Trägheit“ zunächst nahelegt, nur die träge Masse m_e des Elektrons, nicht aber zugleich auch noch andere Naturkonstanten fiktiven Änderungen unterworfen, so folgte aus (2.1) und (2.3) die Form eines Linienelementes, bei welchem die Funktionen f und g (in erster Näherung) einander gleich wären, was dem aus der allgemeinen Relativitätstheorie bekannten Linienelement (z. B. dem Schwarzschildschen Linienelement für ein zentralsymmetrisches Gravitationsfeld) widersprechen würde⁴⁾. Diese Schwierigkeit läßt sich ersichtlich nur dadurch beseitigen,

³⁾ Hier und im folgenden sollen die auf den Vergleichsraum bezogenen fiktiven Größen mit einem * versehen werden. Konsequenterweise wären auch die Koordinaten x_1, x_2, x_3, t zu „sternen“, wovon wir jedoch absehen wollen.

⁴⁾ Nach (2.1) ist a_H der Elektronenmasse m_e umgekehrt, nach (2.3) die Rydberg-Frequenz R dieser direkt proportional, die charakteristische Schwingungsdauer $1/R$ also ebenfalls umgekehrt proportional, daher $f = g$. Demgegenüber fordert das Schwarzschildsche Linienelement, vgl. Gl. (4.1'), in erster Näherung $f = 1/g$, und zwar $f = 1 + 2\gamma$ und $g = 1 - 2\gamma$.

daß man fiktive Veränderungen grundsätzlich bei sämtlichen physikalischen Größen (insbesondere dann auch bei den universellen Naturkonstanten) in Betracht zieht.

Soll das Prinzip der fiktiven Veränderung physikalischer Grundgrößen (Naturkonstanten) generell durchführbar sein, so muß es sich auf beliebige elementare Wechselwirkungen ausdehnen lassen. Auf diese Weise kann auch verständlich gemacht werden, daß man die räumliche Ausdehnung und Zerfallswahrscheinlichkeiten der Atomkerne grundsätzlich ebenso gut zur Längen- und Zeitmessung benutzen kann wie die Eigenschaften der Elektronenhülle der Atome, beispielsweise eine „Cäsium-Uhr“ und eine „Ammoniak-Uhr“ gleichermaßen für die Zeitmessung im Gravitationsfeld geeignet sind. Auf Einzelheiten soll hier nicht näher eingegangen werden.

§ 3. Das heuristische Verfahren

a) Dimensionelle Überlegungen

Die Überlegungen von § 2 lassen sich in einer ungezwungenen Weise zu einer heuristischen Begründung einiger wichtiger Folgerungen aus der allgemeinen Relativitätstheorie ergänzen. Es sollen hierbei die Annahmen, welche die Grundlage für die Erweiterung der speziellen Relativitätstheorie bilden, ausdrücklich formuliert werden⁵⁾. Es sind dies die beiden folgenden:

1. Das Äquivalenzprinzip (Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse).

2. Die Annahme, daß zwei fundamentale Naturkonstanten: Plancksches Wirkungsquantum $\hbar$ und relativistische Gravitationskonstante κ , im Sinne der Überlegungen von § 2 vom (Newtonschen) Gravitationspotential *unabhängig* sind.

Das Äquivalenzprinzip bildet seit je die empirische Grundlage für die allgemeine Relativitätstheorie. Diesem gemäß sind die Vorgänge in (relativ zu Inertialsystemen) beschleunigten Bezugssystemen der Einwirkung von realen Gravitationsfeldern äquivalent. Es ist wohl bekannt, daß sich hieraus ein unmittelbarer Einfluß des Gravitationsfeldes auf den „Gang“ von Normaluhren ergibt, derart, daß die Schwingungsdauer von Uhren im Gravitationsfeld nach Maßgabe des Faktors $1 + \gamma = 1 - \Phi/c^2$ veränderlich ist, wenn Φ das Newtonsche Potential am Orte der Uhr ist (z. B. Rotverschiebung von Spektrallinien auf der Sonne)⁶⁾. An diesem Effekt kann nicht gezweifelt werden, wenn man nicht die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie gänzlich verwerfen will (im übrigen entspricht die ganze Auffassungsweise dieses Effektes genau dem Modell von § 2).

Gibt man die Prämissen 1. und 2. zu, so ergeben sich aus ihnen bereits schon durch dimensionelle Betrachtungen weitreichende Folgerungen. Denn die dimensionell voneinander unabhängigen Größen: Zeit t sowie κ und $\hbar$, können jetzt an Stelle der Dimensionen cm, g, sec gesetzt werden, so daß sich umgekehrt beispielsweise eine Länge l und eine Masse m dimensionell

⁵⁾ Vgl. hierzu auch die früheren Arbeiten von A. Einstein, s. insbesondere Jahrbuch d. Radioaktivität und Elektronik **4**, 411 (1907), sowie F. Hund, Z. Physik **124**, 742 (1948).

⁶⁾ Siehe z. B. A. Einstein, Ann. Physik **35**, 898 (1911); M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins u. ihre physikalischen Grundlagen, S. 254 ff. (1920); vgl. auch Abschn. d).

durch t , κ und $\hbar$ ausdrücken lassen. Da aber jedenfalls die Größe eines Zeitintervalls t nach dem Äquivalenzprinzip vom Gravitationsfeld abhängt, so müssen im allgemeinen auch die übrigen physikalischen Größen von diesem abhängen, damit κ und $\hbar$ unabhängig vom Gravitationsfeld werden.

Die zweite Annahme: Unveränderlichkeit der Planckschen Konstanten $\hbar$ und der relativistischen Gravitationskonstanten κ , ist deshalb eigens zu formulieren, weil im Sinne der Auffassungsweise von § 2 physikalische Größen (z. B. die Lichtgeschwindigkeit und elementare Massen) im allgemeinen vom Gravitationsfeld abhängig sein werden; daß dies bei den genannten Naturkonstanten nicht der Fall sein soll, ist daher ausdrücklich eine Annahme. Hinsichtlich der Planckschen Konstanten $\hbar$ wird man zunächst so argumentieren, daß Quantentheorie mit Gravitationstheorie a priori nichts zu tun hat (da jene die elementare Konstitution der Materie, diese aber nur das makroskopisch-statistische Verhalten der Materie betrifft), mithin keine Beeinflussung von $\hbar$ durch das Gravitationsfeld zu erwarten ist. Im folgenden Abschnitt b) soll die behauptete Unabhängigkeit des Wirkungsquantums $\hbar$ vom Gravitationsfeld jedoch eingehend begründet werden.

Für die relativistische Gravitationskonstante ($= 8\pi G/c^4$, G Newtonsche Gravitationskonstante) läßt sich unsere Annahme durch den geforderten Anschluß an die Newtonsche Gravitationstheorie begründen. Wenn man nämlich fordert, daß die Quellen des Gravitationsfeldes (der Materietensor $T_{\mu\nu}$) die geometrischen Verhältnisse des Raum-Zeit-Kontinuums (den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ und dessen Ableitungen) kausal bestimmen, kann die verknüpfende Konstante κ selbst nicht vom Gravitationsfeld (den $g_{\mu\nu}$) abhängen⁷⁾, sofern man einen allgemeinen (noch nicht genauer spezifizierten) Zusammenhang $R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ analog der Newtonschen Gravitationstheorie fordert. $T_{\mu\nu}$ besitzt hierin die Dimension einer Energiedichte ($\text{g cm}^{-1} \text{sec}^{-2}$). Da wir nun, um für schwache Gravitationsfelder den Anschluß an die Newtonsche Theorie zu gewinnen (Poisson-Gleichung), verlangen müssen, daß $R_{\mu\nu}$ die dimensionslosen $g_{\mu\nu}$ und ihre Ableitungen nach den Koordinaten x_ν nur bis zu den zweiten enthält und von den letzteren linear abhängt⁸⁾, so folgt für κ im egs-System die Dimension:

$$[\kappa] = \text{g}^{-1} \text{cm}^{-1} \text{sec}^2. \quad (3.1)$$

Andererseits verhält sich nach dem Äquivalenzprinzip die Zeiteinheit im Gravitationsfeld wie $1 - \Phi/c^2$, was wir (symbolisch) durch

$$\text{sec} \sim 1 + \gamma \quad (3.2)$$

($\gamma = -\Phi/c^2$) zum Ausdruck bringen. Daher gilt wegen der *Invarianz* von κ im Gravitationsfeld nach (3.1)

$$\text{g cm} \sim \text{sec}^2 \sim 1 + 2\gamma. \quad (3.3)$$

Weiter folgt aus der *Invarianz* von $\hbar$ (Dimension $\text{g cm}^2 \text{sec}^{-1}$)

$$\text{g cm}^2 \sim \text{sec} \sim 1 + \gamma \quad (3.4)$$

⁷⁾ Im Gegensatz zur Jordanschen Kosmologie, welche allerdings eine projektive Erweiterung der Einsteinschen Relativitätstheorie ist.

⁸⁾ Wir haben diese weiteren Forderungen nicht ausdrücklich unter den Grundannahmen aufgeführt, weil diese in der Definition von κ bereits enthalten sind.

und daher schließlich aus (3.3) und (3.4):

$$cm \sim 1 - \gamma; \quad g \sim 1 + 3\gamma. \quad (3.5)$$

Die Proportionalitäten (3.2) und (3.5) sind im Sinne unseres „Bildes“ unmittelbar als der Einfluß des Gravitationsfeldes auf ein Zeit-, Längen- und Massennormal zu deuten. Die Veränderung des Längen- und Zeitnormals (Maßstab und Uhr) bestimmt die Metrik (in erster Näherung); das Linienelement wird in erster Näherung nach (2.6), (3.2) und (3.5):

$$ds^2 = -(1 + 2\gamma + \dots)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + (1 - 2\gamma + \dots)c^2 dt^2. \quad (3.6)$$

Der Einfluß des Gravitationsfeldes auf das Massennormal gemäß (3.5) kann andererseits im Sinne des Machschen Prinzips aufgefaßt werden: Mit Annäherung einer Probemasse m an Ansammlungen größerer Massen muß dessen Trägheit zunehmen! Inwieweit diese Auffassung zweckmäßig und durchführbar ist, kann jedoch erst eine genauere Untersuchung zeigen (vgl. hierzu die folgenden Abschnitte § 4 und § 5).

Damit haben wir festen Boden gewonnen. Es ist befriedigend, daß auf dem eingeschlagenen Wege das Linienelement (3.6) sich in Übereinstimmung mit der ersten Näherung des Linienelementes für statische Gravitationsfelder nach der allgemeinen Relativitätstheorie (z. B. Schwarzschildsche Lösung) ergibt. Hieraus folgen dann in bekannter Weise die allgemein-relativistischen Effekte erster Ordnung: die Rotverschiebung und die Lichtablenkung im Gravitationsfeld. Letztere kann auch so interpretiert werden, daß sich die Lichtgeschwindigkeit nach (3.2) und (3.5) gemäß dem Faktor $1 - 2\gamma$ verhält, d. h. daß die „effektive“ Lichtgeschwindigkeit c^* im Gravitationsfeld⁹⁾ durch

$$c^* = c \cdot (1 - 2\gamma) \quad (3.7)$$

gegeben wird; hieraus folgt dann nach dem Prinzip von Huyghens die Lichtablenkung beispielsweise für einen die Sonne tangierenden Lichtstrahl im Betrage von $1,75''^{10)}$.

Nicht enthalten ist in (3.2) und (3.5) bzw. (3.6) der korrekte Betrag der Perihelbewegung der Planeten (Effekt zweiter Ordnung). Dies hängt damit zusammen, daß das Linienelement (3.6) noch nicht exakt ist bezüglich der Glieder zweiter Ordnung. Die Erweiterung des Linienelementes in dieser Richtung erfolgt auf einem heuristischen Wege in Abschn. d) dieses Paragraphen.

Außer κ und $\hbar$ gibt es noch andere Größen, welche sich gegenüber dem Gravitationsfeld als unveränderlich erweisen. Hierzu gehören ersichtlich alle (im C.G.S.-System) dimensionslosen Größen, insbesondere die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/\hbar c$. Dieses Ergebnis unserer dimensionellen Betrachtung wurde in § 2 ursprünglich als Annahme eingeführt, um beliebige atomare Maßstäbe unabhängig vom Gravitationsfeld aufeinander beziehen zu können¹¹⁾. Ebenso ist auch $e^2/G m_e^2 \approx 10^{42}$ invariant, während e , G und m_e

⁹⁾ Vgl. hierzu Anm. ³⁾ und S. 371 (Einführung).

¹⁰⁾ A. Einstein, Ann. Physik **49**, 818ff. (1916).

¹¹⁾ Es sei in diesem Zusammenhang erwähnt, daß nach Untersuchungen von R. Minkowski u. O. C. Wilson, Astrophys. Journ. **123**, 373 (1956), sich der Wert der Feinstrukturkonstanten α innerhalb der letzten $7 \cdot 10^8$ Jahre nicht merklich geändert haben kann. Diese kosmologisch-zeitliche Invarianz von α tritt der hier erörterten räumlichen Invarianz an die Seite.

einzeln vom Gravitationsfeld abhängen (auf eine genauere Deutung dieser Tatsache soll hier nicht eingegangen werden).

Unser Verfahren gibt nachträglich auch einen unmittelbaren Einblick, wie die Veränderung des Längen- und Zeitnormals im Gravitationsfeld zustande kommt, welche zu dem Linienelement (3.6) führt. Nehmen wir als Einheiten den Radius des Wasserstoffatoms $a_H = \hbar^2/m_e e^2$ und die Rydberg-Frequenz $R = 2\pi^2 m_e e^4/\hbar^3$, Gln. (2.1) und (2.3); diese Einheiten werden hiernach — gemäß den Grundvorstellungen der Bohrschen Theorie oder der Wellenmechanik — auf die elementaren Einheiten e , $\hbar$ und m_e (Elektronenmasse) zurückgeführt. Die fiktive Veränderung der Elektronenladung im Gravitationsfeld ergibt sich unmittelbar aus der Unveränderlichkeit von $e^2/\hbar c$; es verhält sich also e^2 wie $\hbar c$, d. h. nach (3.7) wie $1 - 2\gamma$, daher (effektive Ladung)

$$e^* = e \cdot (1 - \gamma). \quad (3.8)$$

Andererseits wird die fiktive Veränderung von m_0 durch (3.5) gegeben (effektive Ruhemasse)

$$m_0^* = m_0 (1 + 3\gamma). \quad (3.9)$$

Hieraus folgt unmittelbar ($\hbar$ bleibt unbeeinflusst, $\hbar^* = \hbar$)

$$a_H^* = a_H (1 - \gamma), \quad R^* = (1 - \gamma) \cdot R$$

und allgemein für beliebige atomare Längen- und Zeitnormale (wegen $\alpha^* = \alpha$)

$$l^* = l (1 - \gamma), \quad t^* = t (1 + \gamma), \quad (3.10)$$

im Einklang mit dem Linienelement (3.6)¹²⁾.

Selbstverständlich setzen diese Überlegungen eine gewisse Vertrautheit mit den Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie bereits voraus; insbesondere haben wir ohne weiteres die Idee des metrischen Feldes übernommen, worin auch die Vorstellung enthalten sein soll, daß die Weltlinien materieller Probekörper mit den Geodätischen des raumzeitlichen Kontinuums übereinstimmen („kräftefreie“ Trägheitsbewegung) und das Licht sich auf geodätischen Nulllinien ausbreitet. Dagegen wurde von dem zentralen Gedanken der allgemeinen Relativitätstheorie, der Forderung der allgemeinen Kovarianz der Feldgesetze, kein Gebrauch gemacht. Gerade dieser Umstand mag den hier dargebotenen heuristischen Zugang zur allgemein-relativistischen Gravitationstheorie erwünscht erscheinen lassen.

b) Verhalten des universalen Wirkungsquantums $\hbar$

Als Beispiel einer physikalischen Größe, welche sich als unabhängig vom Gravitationsfeld erweist, betrachten wir hier speziell das universale Wirkungsquantum $\hbar$. Diese Unabhängigkeit haben wir im Vorangehenden als heuristischen Gesichtspunkt benutzt. Wir wollen jetzt nachträglich zeigen, daß sich ein solches Verhalten von $\hbar$ in jeder metrischen Theorie weitgehend unabhängig von irgendwelchen speziellen Annahmen ergibt.

Wir gehen hierbei von einem Linienelement der allgemeinen Form (2.6) aus:

$$ds^2 = -f(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + g c^2 dt^2. \quad (3.11)$$

¹²⁾ Durch die Notwendigkeit der gleichzeitigen Änderung von e und m_e in e^* und m^* verschwindet nunmehr auch der Widerspruch, auf den wir am Ende von § 2, S. 376 hingewiesen haben; vgl. Fußnote 4).

Aus dem Prinzip der geodätischen Nulllinien für die Lichtausbreitung ergibt sich in Verallgemeinerung von (3.7)

$$c^{*2} = \frac{g}{f} c^2. \quad (3.12)$$

Andererseits wird die Lagrange-Funktion für die „kräftefreie“ Trägheitsbewegung gemäß $\delta \int ds = \delta \int L dt = 0$:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{g - f \beta^2}, \quad \beta^2 = \frac{1}{c^2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2). \quad (3.13)$$

Indem wir dem hier durchgeführten Verfahren entsprechend fordern, daß die Lagrange-Funktion, wie jede andere physikalische Größe, formal dieselbe Gestalt wie in der speziellen Relativitätstheorie annimmt (s. Einleitung), wenn wir an Stelle der ursprünglichen Größen m_0 , c und $\beta_k = v_k/c$ durchweg die fiktiven Größen m_0^* , c^* und $\beta_k^* = v_k/c^*$ benutzen, muß sich L auch in der Form

$$L = L^* = -m_0^* c^{*2} \sqrt{1 - \beta^{*2}}, \quad m^* = \frac{m_0^*}{\sqrt{1 - \beta^{*2}}} \quad (3.14)$$

darstellen lassen¹³⁾. Mit Rücksicht auf (3.12) läßt sich (3.13) in der Tat folgendermaßen schreiben:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{g} \sqrt{1 - \beta^{*2}}. \quad (3.13')$$

Vergleich von (3.13') mit (3.14) liefert daher in Strenge

$$m_0^* c^{*2} = m_0 c^2 \sqrt{g} \quad (3.15)$$

bzw. mit Rücksicht auf (3.12), in Verallgemeinerung von (3.9):

$$m_0^* = \frac{c^2}{c^{*2}} \sqrt{g} m_0 = \frac{f}{\sqrt{g}} m_0. \quad (3.15a)$$

Aus (3.11) und (3.15) ist jetzt unmittelbar zu ersehen, daß sich einerseits die Zeiteinheit sec wie $1/\sqrt{g}$, andererseits die Energieeinheit erg wie $\sqrt{g}$ verhält. Mithin muß eine Wirkung von der Dimension $\text{erg} \cdot \text{sec}$ von g ebenso wie von f und damit vom Gravitationsfeld gänzlich unabhängig sein. Es kann also auch das elementare Plancksche Wirkungsquantum vom jeweils vorhandenen Gravitationsfeld nicht beeinflusst werden.

Auf die Bedeutsamkeit dieser Tatsache werden wir unter allgemeinen Gesichtspunkten in den Schlußbemerkungen (§ 6) zurückkommen.

e) Feldgleichungen in linearer Näherung und Bewegungsgleichungen

Wir haben bisher ausschließlich das statische Gravitationsfeld betrachtet; von dieser Beschränkung wollen wir uns jetzt befreien. Dieser Schritt entspricht derjenigen Erweiterung der Newtonschen Theorie, welche von den statischen Feldern zu stationären und nicht-stationären Feldern bei Massenbewegungen führt. Hierbei wollen wir uns durchweg auf die lineare Näherung beschränken („schwache“ Gravitationsfelder).

1. Wir fragen zunächst nach den Feldgleichungen in linearer Näherung. Setzen wir das Linienelement (3.6) für das statische Feld mit $x_4 = i c t$ in die Form

$$-ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k = (1 + 2\gamma) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + (1 - 2\gamma) dx_4^2, \quad (3.16)$$

¹³⁾ Vgl. hierzu auch § 4, Abschn. a).

und andererseits

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \gamma_{ik}, \quad (3.17)$$

so haben wir in diesem Spezialfall

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 2\gamma, \quad \gamma_{44} = -2\gamma, \quad \gamma_{ik} = 0 \quad \text{für } i \neq k. \quad (3.16a)$$

Ein naheliegender Ansatz für die Feldgleichungen, denen die γ_{ik} zu genügen haben, wäre nun nach den Ausführungen in Abschn. a) dieses Paragraphen

$$\square \gamma_{ik} = -2\kappa T_{ik};$$

denn dieser ginge für γ_{44} mit $T_{44} = -\rho c^2$ (Energiedichte) bei geeigneter Wahl von κ und der Spezialisierung auf den statischen Fall jedenfalls in die Poisson-Gleichung der Newtonschen Theorie über. Man sieht aber sofort, daß dies nicht auf die richtige Verallgemeinerung der Newtonschen Theorie führen kann; denn die Anwendung derselben Gleichung auf γ_{11} , γ_{22} und γ_{33} liefert für ruhende Materie ($T_{ik} = 0$ außer für $i = k = 4$) ersichtlich ein falsches Ergebnis ($\gamma_{11} = 0$ an Stelle von $\gamma_{11} = 2\gamma = -2\frac{\rho}{c^2}$)¹⁴⁾. Im Rahmen einer linearen Theorie bleibt daher nur die Möglichkeit, geeignete Linearkombinationen der γ_{ik} einer analogen Gleichung zu unterwerfen. Die einzige im Hinblick auf den Tensorcharakter und die Lorentz-Invarianz der Gleichungen zulässige Veränderung besteht aber darin, die γ_{ik} in der letzten Gleichung durch

$$\gamma'_{ik} = \gamma_{ik} + \alpha \delta_{ik} \gamma, \quad (3.18)$$

wobei $\bar{\gamma} = \sum \gamma_{ii}$ die invariante Spur der γ_{ik} ist, mit zunächst unbestimmtem Zahlenfaktor α zu ersetzen. Die linearen Feldgleichungen sollen jetzt lauten:

$$\square \gamma'_{ik} = -2\kappa T_{ik}. \quad (3.19)$$

In der Tat lassen sich die verfügbaren Konstanten α und κ eindeutig so bestimmen, daß aus (3.19) für das (schwache) statische Gravitationsfeld (3.16a) bzw. (3.16) hervorgeht und zugleich der Anschluß an die Newtonsche Gravitationskonstante erreicht wird. Für das statische Feld wird

$$\gamma = 3\gamma_{11} + \gamma_{44}$$

und daher wegen $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$, $T_{44} = -\rho c^2$ nach (3.18) und (3.19)

$$(1 + 3\alpha) \Delta \gamma_{11} + \alpha \Delta \gamma_{44} = 0$$

$$3\alpha \Delta \gamma_{11} + (1 + \alpha) \Delta \gamma_{44} = 2\kappa \rho c^2$$

oder:

$$\Delta \gamma_{11} = \frac{-\alpha}{1 + 4\alpha} 2\kappa \rho c^2, \quad \Delta \gamma_{44} = \frac{1 + 3\alpha}{1 + 4\alpha} 2\kappa \rho c^2.$$

¹⁴⁾ Tatsächlich hat Einstein bis zur endgültigen Fassung seiner Theorie im Jahre 1915 die linearen Feldgleichungen noch in der Form $\square \gamma_{ik} = -2\kappa T_{ik}$ angesetzt. Demgemäß erscheint bei ihm das Linienelement für statische Gravitationsfelder zunächst in der inkorrekten Form

$$ds^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + (1 - 2\gamma) c^2 dt^2.$$

Wir haben demgegenüber den Vorteil, das Linienelement bei unserem heuristischen Verfahren in den in γ linearen Gliedern genau angeben zu können. Beispielsweise wird hiernach die Lichtablenkung im Gravitationsfeld doppelt so groß als nach obigem Ausdruck.

Da nach (3.16a) $\gamma_{44} = -\gamma_{11}$, so müssen die rechten Seiten entgegengesetzt gleich sein; daher $\alpha = -\frac{1}{2}$. Damit wird endgültig

$$\gamma'_{ik} = \gamma_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} \gamma; \quad (3.18')$$

ferner

$$\Delta \gamma_{44} = \frac{2}{c^2} \Delta \Phi = \kappa \varrho c^2$$

und wegen $\Delta \Phi = 4\pi G \varrho$ (G Newtonsche Gravitationskonstante):

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (3.20)$$

Die Gln. (3.19), (3.18') und (3.20) enthalten also die „natürliche“ Verallgemeinerung der Newtonschen Theorie für nicht-statische Felder. Die Frage der Eindeutigkeit dieser Gleichungen erledigt sich demnach ohne formale feldtheoretische Überlegungen¹⁵⁾. Sie sind in völliger Übereinstimmung mit der linearen Näherung der allgemein kovarianten Feldgleichungen der Gravitation.

Es sei noch hervorgehoben, daß die γ'_{ik} der Bedingung

$$\frac{\partial \gamma'_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (3.21)$$

genügen. Dies ergibt sich unmittelbar, wenn man als Lösungen von (3.19) retardierte Potentiale ansetzt (Ausstrahlungsbedingung!) und die Divergenzbedingung für den Materietensor $\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik} = 0$ der speziellen Relativitätstheorie beachtet. Wir haben dann

$$\frac{\partial \gamma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik} \right\}_{t-\frac{r}{c}} dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Gl. (3.21) spielt bekanntlich beim Übergang von den streng kovarianten (nicht-linearen) Feldgleichungen zur linearen Näherung als „Koordinatenbedingung“ eine wichtige Rolle¹⁶⁾.

2. Nach Lösung der Feldgleichungen — Bestimmung der γ'_{ik} aus (3.19) und hiernach der γ_{ik} aus (3.18') — folgt das Bewegungsgesetz für einen Massenpunkt (Probekörper) unmittelbar aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int ds = 0, \quad (3.22)$$

das sich stets auch in die Gestalt eines Hamilton-Prinzips umsetzen läßt. Ausgehend von

$$-ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k = (\delta_{ik} + \gamma_{ik}) dx_i dx_k$$

kann (3.22) in Analogie zur speziellen Relativitätstheorie auch geschrieben werden:

$$\delta \int L dt = 0, \quad L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2 - \frac{1}{c^2} \gamma_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k}. \quad (3.23)$$

¹⁵⁾ Man vergleiche hierzu W. Thirring, Lorentz-Invariante Gravitationstheorien (Fortschr. der Physik 7, 79 (1959)), wo im Gegensatz zu unserem heuristischen Verfahren der feldtheoretische Standpunkt in den Vordergrund gerückt ist.

¹⁶⁾ A. Einstein, Berliner Sitzungsberichte 1915 (2), S. 831.

Wir denken uns nunmehr die Bewegung gravitationserzeugender Massen als langsam gegen die Lichtgeschwindigkeit und wollen daher in dem Tensor

$$T_{ik} = \varrho \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}$$

nur diejenigen Glieder berücksichtigen, welche die Geschwindigkeitskomponenten dx_i/ds , $i = 1, 2, 3$, linear enthalten (von Spannungen soll abgesehen werden, ϱ natürlich gemessene Dichte). In diesem Falle wird, vgl. (3.16a),

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -\gamma_{44} = 2\gamma = -2 \frac{\Phi}{c^2},$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{ik} = 0 \\ \gamma_{i4} \neq 0 \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad i, k = 1, 2, 3; \quad i \neq k.$$

Damit wird die Lagrange-Funktion in (3.23):

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2 + \gamma_{44}(1 + \beta^2) - 2i \gamma_{i4} \beta_i}. \quad (3.23')$$

Wir streben hier zunächst eine Entwicklung an, welche die „kleinen“ Glieder γ_{44} , γ_{i4} und β^2 (nach dem Energiesatz ist β^2 von derselben Größenordnung wie γ_{44}) in den niedrigsten Ordnungen enthält; d. h. in den Impulsen sollen nur Glieder erster Ordnung, in den Kräften Glieder bis zur Ordnung 3/2 auftreten (damit der Einfluß der Glieder γ_{i4} überhaupt bemerkbar wird). Man erhält dann nach einfacher Rechnung (die Quadratwurzel in (3.23') braucht im Nenner hierbei nicht entwickelt zu werden):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m_0 (v_k + i c \gamma_{k4}), \quad \frac{\partial L}{\partial x_k} = -\frac{m_0 c^2}{2} \frac{\partial \gamma_{44}}{\partial x_k} + i m_0 c \frac{\partial \gamma_{i4}}{\partial x_k} v_i$$

und die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen werden:

$$\frac{d}{dt} (m_0 v_k) = -\frac{m_0 c^2}{2} \frac{\partial \gamma_{44}}{\partial x_k} + i m_0 c \left(\frac{\partial \gamma_{i4}}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_{k4}}{\partial x_i} \right) v_i - i m_0 c \frac{\partial \gamma_{k4}}{\partial t}.$$

Setzen wir

$$i c \gamma_{i4} = g_i \quad (3.24)$$

(g_i reell, nicht Komponente eines Vektors), so folgt hieraus wegen der Identität

$$i c \left(\frac{\partial \gamma_{i4}}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_{k4}}{\partial x_i} \right) v_i = [\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{g}]_k$$

die Bewegungsgleichung (die Ruhmasse m_0 fällt natürlich heraus):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{grad} (\gamma c^2) + [\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{g}] - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}. \quad (3.25)$$

Wir erhalten auf diesem — heuristischen — Wege die bekannten Effekte: Das erste Glied der rechten Seite ist die Newtonsche Gravitationskraft, das zweite Glied ist die Grundlage für die Berechnung der Gravitationswirkung bei stationärer Rotationsbewegung von Massen (H. Thirring-Effekt), das dritte Glied entspricht einem Induktionseffekt bei zeitlicher Veränderung der Massenverteilung. Auf Einzelheiten braucht hier nicht eingegangen zu werden. Wir werden die beiden letzteren Effekte im Zusammenhang mit dem Machschen Prinzip noch näher ins Auge fassen (§ 6).

In dem Variationsprinzip (3.23) ist auch die Massenänderung im Gravitationsfeld, Gl. (3.9), vollständig enthalten. Um dies zu erkennen, ist es aber

nötig, die Impulse in den kleinen Größen um eine Ordnung weiter zu entwickeln. Führt man die Entwicklung auch bezüglich der Kräfte einen Näherungsschritt weiter, so erhält man eine Bewegungsgleichung, welche die Perihelbewegung der Planeten enthält. Hierzu ist erforderlich, g_{44} in dem Linienelement (3.16) bis zu den in γ quadratischen Gliedern anzugeben; dieser weitere Schritt soll in Abschn. d) ausgeführt werden.

d) Erweiterung des Linienelementes bis zu Gliedern zweiter Ordnung

Wie schon unter a) hervorgehoben worden ist, ist das Linienelement in der Form (3.6) bzw. (3.16) für statische Gravitationsfelder noch nicht befriedigend hinsichtlich der Größenordnung der Glieder. Beim Übergang zur Lagrange-Funktion zeigt sich, daß g_{44} bis zu Größen der Ordnung γ^2 bestimmt werden müßte, damit der Ausdruck für das Linienelement in den Gliedern zweiter Ordnung korrekt wird; man vergleiche hierzu die näheren Ausführungen in § 4.

Es fragt sich, ob unsere heuristischen Überlegungen auch dies zu leisten vermögen. Gegen das folgende Verfahren dürften sich wohl keine ernstlichen Einwendungen erheben lassen. Doch soll ausdrücklich betont werden, daß die heuristische Ermittlung der Größen zweiter Ordnung in γ nicht mehr denselben Grad von Evidenz besitzt wie diejenige der Größen erster Ordnung.

Die Gestalt von $g_{44} = 1 - 2\gamma$ wird gewöhnlich als eine unmittelbare Folge der Äquivalenz von (statischem) Schwerfeld und beschleunigtem Bezugssystem angesehen. Wir wollen die Begründung dieses Gliedes in einer Form geben, daß auch das quadratische Glied in γ mit herauskommt: Wir betrachten ein infinitesimal homogenes statisches Gravitationsfeld. Eine Lichtquelle A und ein Beobachter B seien durch einen starren Stab in Richtung des Feldes miteinander verbunden (s. Abb. 1). Das Feld kann nach dem Äquivalenzprinzip durch eine Beschleunigung des Stabes in umgekehrter Richtung wie das Feld (nach oben, wenn das Feld nach unten weist) ersetzt werden. Ein von A nach oben gesandtes Lichtsignal treffe den Beobachter B (am Orte B') in der Entfernung dl von A . Die Geschwindigkeit, welche B im Augenblick des Eintreffens des Signals erreicht hat, ist $dv = g dt = g \cdot dl/c$, wenn man den infinitesimalen Stab in dem Augenblick mit der Beschleunigung g in Bewegung setzt, da das Lichtsignal den Punkt A (ohne Geschwindigkeit) verläßt. Dem entspricht eine infinitesimale Doppler-Verschiebung

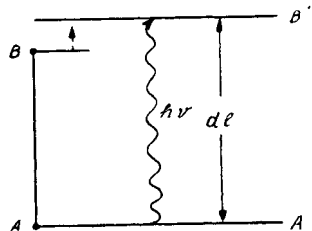


Abb. 1. Zur Herleitung von g_{44} mittels des Äquivalenzprinzips

$$v_B = v_A + dv = v_A(1 - d\beta)$$

der Frequenz des Lichtes, und zwar ist

$$d\beta = \frac{dv}{c} = \frac{g dl}{c^2} = -\frac{d\Phi}{c^2} = d\gamma,$$

also auch

$$\frac{dv}{v} = -d\beta = -d\gamma.$$

Letztere Gleichung läßt sich integrieren, wobei wir den Beobachter B ins Unendliche hinausschieben. Man erhält

$$\int_{\gamma_A}^{\gamma_B = \gamma_\infty} \frac{d\gamma}{\gamma} = - \int_{\gamma_A}^0 d\gamma = \gamma_A$$

oder auch

$$\gamma_A = \gamma_\infty e^{-\gamma_A} = \gamma_\infty \left(1 - \gamma_A + \frac{1}{2} \gamma_A^2 + \dots\right).$$

Nun ist $\gamma_\infty = 1/\Delta T$, $\gamma_A = 1/\Delta t$, wenn ΔT die Schwingungsdauer einer Uhr im feldfreien Raum (am Orte $B \rightarrow \infty$) ist, Δt die Schwingungsdauer derselben Uhr (Atom) im Gravitationsfeld (am Orte A). Wir haben daher mit $\gamma = \gamma_A$

$$\Delta T = \left(1 - \gamma + \frac{1}{2} \gamma^2 + \dots\right) \Delta t$$

und daher auch

$$dT^2 = (1 - 2\gamma + 2\gamma^2 + \dots) dt^2.$$

Demgemäß können wir das Linienelement (3.6) so erweitern:

$$ds^2 = - (1 + 2\gamma) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + (1 - 2\gamma + 2\gamma^2) c^2 dt^2. \quad (3.26)$$

Der Vergleich mit dem exakten Schwarzschildschen Linienelement im folgenden Abschnitt wird zeigen, daß diese Erweiterung bis zu den Gliedern zweiter Ordnung, die wir hier anhangsweise durchgeführt haben, richtig ist. Das Linienelement (3.26) wird uns in § 5 in den Stand setzen, die Perihelbewegung der Planeten in Übereinstimmung mit dem Einsteinschen Ergebnis abzuleiten.

§ 4. Verhalten der Masse und Ladung im statischen Gravitationsfeld nach der allgemeinen Relativitätstheorie

Es soll nunmehr untersucht werden, wie sich die in § 3 im Prinzip durchgeführte, jedoch nur heuristisch begründete Veränderung physikalischer Größen im Gravitationsfeld unabhängig von dimensionellen Betrachtungen vom Standpunkt des speziellen, aus den exakten kovarianten Feldgleichungen hergeleiteten Schwarzschildschen Linienelementes ausnimmt. Diese Überlegungen führen zu einer weiteren Bestätigung des im vorangehenden benutzten Verfahrens.

a) Effektive Masse

Das Schwarzschildsche Linienelement läßt sich in die räumlich isotrope Form setzen:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^2} dx_4^2; \quad (4.1)$$

darin ist $x_4 = ct$ und

$$\gamma = - \frac{\Phi}{c^2} = \frac{MG}{c^2 r}. \quad (4.1a)$$

(Φ das Newtonsche Potential der Masse M). Die Trägheitsbahn eines Probekörpers genügt dem Prinzip der geradesten Bahn

$$\delta \int ds = 0. \quad (4.2)$$

Für die folgenden Überlegungen ist es von ausschlaggebender Bedeutung, den Ausdruck (4.1) und die gemäß (4.2) daraus hervorgehenden Bewegungsgleichungen bezüglich der Größenordnung der auftretenden Terme konsequent zu entwickeln. Die Größe γ werde (für Abstände vom Gravitationszentrum, die groß gegen den Gravitationsradius sind) als klein von der ersten Ordnung betrachtet; von derselben Größenordnung sind dann nach dem Energiesatz der gewöhnlichen Mechanik (erste Näherung der allgemein-relativistischen Theorie) die Terme mit β^2 ($\beta_k = v_k/c$). Größen mit γ^2 und $\gamma\beta^2$ sind demgemäß klein von der zweiten Ordnung, usf. Wir streben im folgenden eine Entwicklung an, welche in diesem Sinne exakt bis zur 2. Ordnung ist. Dies wird uns u. a. ermöglichen, in § 5 eine exakte Analyse der Perihelbewegung der Planeten unter dem Gesichtspunkt der Veränderlichkeit der Planetenmasse im Gravitationsfeld (Machsches Prinzip) durchzuführen.

Da im folgenden das Bewegungsgesetz (4.2) der allgemeinen Relativitätstheorie mit der Vorstellungsweise der gewöhnlichen Mechanik in Verbindung gebracht werden soll, so ist es nicht nur bequem, sondern auch unmittelbar geboten, vom Hamiltonschen Prinzip für die Bewegung eines Massenpunktes auszugehen. Wir schreiben daher an Stelle von (4.2)

$$\delta \int L dt = 0 \quad (4.2')$$

und haben mit

$$L = -m_0 c \frac{ds}{dt} \quad (4.3)$$

(m_0 Ruhmasse des Probekörpers in unendlicher Entfernung vom Gravitationszentrum) die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial L}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (4.4)$$

L selbst ergibt sich unmittelbar aus (4.1) bei entsprechender Entwicklung von ds^2 , vgl. auch (3.6) und (3.26):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 + 2\gamma)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + (1 - 2\gamma + 2\gamma^2)c^2 dt^2 \\ &= \{1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - (1 + 2\gamma)\beta^2\} c^2 dt^2 \end{aligned} \quad (4.1')$$

und daher nach (4.3)

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - (1 + 2\gamma)\beta^2}, \quad (4.3')$$

mit

$$\beta^2 = \frac{1}{c^2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

und den Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} &= m_0 \left(1 + 3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2 \right) v_k \\ \frac{\partial L}{\partial x_k} &= m_0 c^2 \left(1 - \gamma + \frac{3}{2}\beta^2 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Bewegungsgleichung (4.4) nimmt damit die Gestalt an:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + 3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2 \right) v \right\} = \left(1 - \gamma + \frac{3}{2}\beta^2 \right) \text{grad} (\gamma c^2). \quad (4.6)$$

Gl. (4.6) läßt, was zunächst die linke Seite betrifft, den wesentlichen Punkt deutlich hervortreten: die durch Gravitationsfeld und Geschwindigkeit

veränderte träge Masse ist (in erster Näherung)

$$m^* = \left(1 + 3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2\right)m_0. \quad (4.7)$$

Die Impulsdefinition, Gl. (4.5), ist hierbei die gewöhnliche (Impuls = Masse mal Geschwindigkeit). Die Abhängigkeit der effektiven Masse von β^2 entspricht der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse gemäß der speziellen Relativitätstheorie in erster Näherung. Hinsichtlich des Einflusses des Gravitationsfeldes ergibt sich in der gleichen Größenordnung wieder der Term 3γ , den wir schon in § 3, Gl. (3.9), gefunden hatten. Das dortige (heuristische) Ergebnis wird demnach durch die obige Rechnung bestätigt¹⁷⁾18).

Übrigens ist es auch möglich, den Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse bei der jetzigen Betrachtungsweise aufrechtzuerhalten. Mit (4.6) ist gleichwertig (bis auf Größen höherer Ordnung):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + 3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2\right) \mathbf{v} \right\} = \left(1 + 3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2\right) (1 - 4\gamma + \beta^2) \text{grad } (\gamma c^2) \quad (4.6')$$

bzw. auch, vgl. (4.7):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m^* \mathbf{v}) &= -m^* \text{grad } \Phi^*, \\ \Phi^* &= -(1 - 2\gamma + \beta^2) \gamma c^2. \end{aligned} \quad (4.6'')$$

Man sieht hier allerdings auch die Willkürlichkeit dieser Schreibweise; denn der Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse ist speziell der Newtonschen Mechanik angepaßt, die in der allgemeinen Relativitätstheorie als prinzipiell „aufgehoben“ angesehen werden muß.

Es ist andererseits von grundsätzlicher Bedeutung, daß die Einführung der trägen Masse gemäß (4.7) nicht in derselben Weise mit Willkür behaftet ist wie die Aufrechterhaltung des Satzes von der Gleichheit der trägen und schweren Masse. Denn die Bewegungsgleichung (4.4) bringt ja nichts anderes zum Ausdruck, als daß es überhaupt Impulse und Kräfte gibt, die untereinander in dem gewöhnlichen Zusammenhang stehen; letztere sind in unserem Beispiel aber jedenfalls „Zentralkräfte“.

Um den Unterschied der verschiedenen Auffassungsweisen genauer zu sehen, schreiben wir die Bewegungsgleichung (4.6) in derjenigen Form, die durch den üblichen Formalismus der allgemeinen Relativitätstheorie nahe-

¹⁷⁾ Man vergleiche hierzu A. Einstein, Grundzüge der Relativitätstheorie (Vieweg 1956, 3. Aufl.) S. 65ff., insbesondere Gl. (118). Einstein kommt hier zu dem Ergebnis, daß die Masse eines Probekörpers bei Annäherung an größere Massenansammlungen wie $1 + \gamma$ (in unserer Bezeichnungsweise) zunimmt. Dieses irrtümliche Resultat kommt, worauf uns zuerst Prof. Papapetrou aufmerksam gemacht hat, durch eine inkonsequente Entwicklung der exakten Bewegungsgleichung zustande.

¹⁸⁾ Wir sprechen bei Gl. (4.7), vor allem in Hinblick auf die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse, lieber von „effektiver“ als von „fiktiver“ Masse (s. Einführung). Immerhin besteht folgender Unterschied: Während nach der speziellen Relativitätstheorie alle gleichförmig-translatorisch gegeneinander bewegten Bezugssysteme physikalisch völlig gleichberechtigt sind, ist das cartesische Vergleichssystem x_1, x_2, x_3, t in der allgemeinen Relativitätstheorie nur ein willkürlich eingeführtes „fiktives“ System (freilich ist auch dieses im Sinne der Erweiterung durch die allgemeine Relativitätstheorie ein „berechtigtes“ System). Die gleichzeitige Abhängigkeit der Masse m^* von γ und β^2 legt es daher nahe, von „effektiver Masse“ zu sprechen, wie dies für die Geschwindigkeitsabhängigkeit ohnedies natürlich ist. Offensichtlich ist der Unterschied von „fiktiv“ und „effektiv“ mehr oder weniger willkürlich. S. auch Gl. (4.11) weiter unten im Text.

gelegt wird. Das Prinzip der geradesten Bahn (4.2) führt bekanntlich auf das Bewegungsgesetz

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\varrho}{d\tau} \right) = -\Gamma_{\mu\nu}^\varrho \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 4).$$

Führen wir statt der Eigenzeit $\tau = s/c$ die Koordinaten-Zeit („Labor-Zeit“) t ein, so gehen die Gleichungen mit $\varrho = k = 1, 2, 3$ über in

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{dx^k}{dt} \right) = -\frac{dt}{d\tau} \Gamma_{\mu\nu}^k \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}. \quad (4.8)$$

Es scheint daher naheliegend, die Größe

$$m = \frac{dt}{d\tau} m_0 \quad (4.8a)$$

mit der „trägen Masse“ zu identifizieren, zumal derselbe Faktor $dt/d\tau$ auf der rechten Seite der Gleichung als „schwere Masse“ ebenfalls auftritt. Die Entwicklung von $dt/d\tau$ ergibt jetzt nach (4.8a) im Gegensatz zu (4.7):

$$m = \left(1 + \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) m_0. \quad (4.8b)$$

Die Ausrechnung der rechten Seite von (4.8) ergibt (man umgeht hierbei die Ausrechnung der Christoffelschen Dreindices-Symbole $\Gamma_{\mu\nu}^k$ zweckmäßig durch den Lagrangeschen Formalismus):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) v \right\} \\ &= \left(1 + \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) \{ (1 - 4\gamma + \beta^2) \text{grad}(\gamma c^2) - 2(v \text{ grad } \gamma) v \}. \end{aligned} \quad (4.8')$$

Diese Bewegungsgleichung entspricht sicher nicht der Newtonschen Mechanik. Denn die rechts stehende „Kraft“ ist nicht auf das Gravitationszentrum (wie $\text{grad } \gamma$) gerichtet, sondern enthält außerdem einen Term, welcher in die Richtung der Tangente an die Bahn weist; und zwar derart, daß dieser letztere Term bei Annäherung des Planeten an die Sonne verzögernd, bei Entfernung von der Sonne beschleunigend wirkt. Ein solcher Term kann aber nur dahin gedeutet werden, daß die Trägheit des Planeten bei Annäherung an die Sonne zunimmt, bei Entfernung von ihr abnimmt — ganz im Sinne der von Einstein vermuteten Veränderung der Masse gemäß dem Machschen Prinzip! In der Tat läßt sich nun diese Zusatzkraft innerhalb unserer Näherung so aufspalten:

$$-2(v \text{ grad } \gamma) v = -\frac{d}{dt} (2\gamma v) + 2\gamma \text{grad}(\gamma c^2).$$

Damit geht aber Gl. (4.8') bei entsprechender Vereinigung der Bestandteile in Gl. (4.6') bzw. (4.6) über.

Es ist damit wohl in überzeugender Weise gezeigt, daß der korrekte Ausdruck für die effektive Masse durch Gl. (4.7), und nicht, wie es zunächst naheliegender erscheinen möchte, durch Gl. (4.8a) bzw. (4.8b) gegeben wird. Dies hängt unmittelbar damit zusammen, daß die Lagrangesche Bewegungsgleichung (4.4) die natürliche Verallgemeinerung des Newtonschen Bewegungsgesetzes ist. —

Wir wollen schließlich noch explizite zeigen, daß die Lagrange-Funktion des Probekörpers in Strenge die in § 3, Gl. (3.14), geforderte Gestalt

$$L^* = -m_0^* c^{*2} \sqrt{1 - \beta^{*2}}, \quad \beta^* = \frac{v}{c^*} \quad (4.9)$$

besitzt, woraus für den Impuls

$$p_k = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}^k} = \frac{m_0^*}{\sqrt{1 - \beta^{*2}}} v_k = m^* v_k \quad (4.10)$$

folgt. Denn die Anwendung des Lagrange-Formalismus auf das Linien-element (4.1) liefert hiernach für die effektive Masse den exakten Ausdruck

$$m^* = \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^5}{\sqrt{\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^6 \beta^2}} m_0 \quad (4.11)$$

und daher für $\beta = 0$, vgl. (3.15a)

$$m_0^* = \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^5}{1 - \frac{\gamma}{2}} m_0 = (1 + 3\gamma + \dots) m_0. \quad (4.11a)$$

Zusammen mit dem exakten Ausdruck für die effektive Lichtgeschwindigkeit (Prinzip der geodätischen Nulllinie für die Lichtausbreitung, angewandt auf das Linienelement (4.1), vgl. (3.12))

$$c^* = \frac{\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^3} c \quad (4.11b)$$

läßt sich dann die Lagrange-Funktion $L = -m_0 c \frac{ds}{dt}$ mittels des Linien-elements (4.1) nach elementarer Rechnung in die Gestalt (4.9) überführen.

Bemerkenswerterweise wächst m_0^* , Gl. (4.11a), bei Annäherung des Probekörpers an den kritischen Gravitationsradius, für welchen $\gamma = 2$ wird, über alle Grenzen und strebt andererseits für $r \rightarrow \infty$ (verschwindendes Gravitationsfeld) gegen den Grenzwert m_0 .¹⁹⁾

¹⁹⁾ Es ist von geschichtlichem Interesse, dieses Ergebnis mit der Auffassung zu vergleichen, welche A. Einstein in seiner bekannten kosmologischen Arbeit, Berl. Berichte 1917, § 2, vertreten hat. Nach seiner Ansicht kann es „in einer konsequenten Relativitätstheorie keine Trägheit gegenüber dem ‚Raume‘ geben, sondern nur eine Trägheit der Massen gegeneinander. Wenn ich daher eine Masse von allen anderen Massen der Welt räumlich genügend entferne, so muß ihre Trägheit zu Null herabsinken“. Entsprechend dieser Forderung versucht Einstein zunächst in Übereinstimmung mit unserer Formel (3.15a) $m_g^* = m_0 \cdot f/\sqrt{g}$ Grenzbedingungen für f und g so zu formulieren, daß mit $r \rightarrow \infty$ $m_g^* \rightarrow 0$ abnimmt. Das Fehlschlagen dieses Versuchs veranlaßt Einstein schließlich, die Grenzbedingungen im Unendlichen dadurch zu vermeiden, daß er die Möglichkeit eines endlichen und geschlossenen Universums ins Auge faßt.

Das hier abgeleitete Ergebnis (4.11a) ist mit der obengenannten allgemeinen Ansicht von Einstein natürlich nicht im Einklang. Allein schon die räumliche Zentralsymmetrie des Problems und das Verschwinden der Materie außer im Nullpunkt führt (nach einem Satz von Birkhoff) zu pseudoeuklidischen Grenzbedingungen im Un-

b) Effektive Ladung

Der Probekörper besitze eine elektrische Ladung e und daher auch eine spezifische Ladung e/m_0 ; diese Größen sind zunächst nur für den gravitationsfreien Raum (oder in unendlicher Entfernung von gravitierenden Massen) definiert. Um die *effektive Ladung* im Gravitationsfeld zu ermitteln, ist das Verhalten des Probekörpers unter der gleichzeitigen Einwirkung eines elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes zu untersuchen.

In einem im Gravitationsfeld frei fallenden Kasten (gravitationsfreier Raum, Koordinaten ξ_k) gilt die spezielle Relativitätstheorie. Die Bewegungsgleichung für einen Probekörper folgt dort aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int \left(-m_0 c + \frac{e}{c} \Phi_k \frac{d\xi_k}{ds} \right) ds = 0 \quad (4.12)$$

mit

$$\frac{ds}{dt} = c \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (4.12a)$$

wobei Φ_k die Komponenten des Vierervektors $(\mathfrak{A}, -\varphi)$ zusammenfaßt. Die Bewegungsgleichung eines Probekörpers im Gravitationsfeld ergibt sich hieraus, wenn wir vom frei fallenden Kasten auf das Gravitationsfeld „umtransformieren“. Dabei besteht im Falle schwacher Gravitationsfelder zwischen den Koordinatendifferentialen $d\xi_k$ im frei fallenden Kasten und den bisher benutzten dx_k der Zusammenhang (vgl. (4.1')):

$$d\xi_k = (1 + \gamma) dx_k \quad \text{für } k = 1, 2, 3; \quad d\xi_4 = (1 - \gamma) dx_4. \quad (4.13)$$

Damit wird nun das Variationsproblem bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes

$$\delta \int \left(-m_0 c + \frac{e}{c} (1 + \gamma) \mathfrak{A} \frac{dx}{ds} - e (1 - \gamma) \varphi \frac{dt}{ds} \right) ds = 0, \quad (4.12')$$

wobei in unserer Näherung

$$\frac{ds}{dt} = c \sqrt{1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - (1 + 2\gamma)\beta^2} \quad (4.12a')$$

ist. Dabei vernachlässigen wir die geringe Gravitationswirkung des elektromagnetischen Feldes.

Gl. (4.12') läßt sich in die Gestalt des Hamiltonschen Prinzips

$$\delta \int L dt = 0 \quad (4.14)$$

mit

$$L = \left(-m_0 c + \frac{e}{c} (1 + \gamma) \mathfrak{A} \frac{dx}{ds} - e (1 - \gamma) \varphi \frac{dt}{ds} \right) \frac{ds}{dt} \quad (4.14a)$$

Fortsetzung der Fußnote ¹⁹⁾ von S. 390.

endlichen und daher zu einem unendlichen offenen Weltmodell. Im räumlich Unendlichen nimmt daher die Trägheit nicht gegen Null ab, sondern strebt dem Grenzwert m_0 zu; dagegen wächst die Trägheit bei Annäherung an $\gamma = 2$ über alle Grenzen. In letzterem Verhalten könnte man zwar eine gewisse Bestätigung des Einsteinschen Gedankens erblicken. Doch wäre hierbei „die Trägheit durch die (im Endlichen vorhandene) Materie zwar beeinflusst, aber nicht bedingt. Wenn nur ein einziger Massenpunkt vorhanden wäre, so besäße er nach dieser Auffassungsweise Trägheit, und zwar eine beinahe gleich große wie in dem Falle, daß er von den übrigen Massen unserer tatsächlichen Welt umgeben ist.“ Dieser Widerspruch zu einer „konsequenten Relativitätstheorie“ kann nach Einstein nur durch das Fallenlassen der Grenzbedingungen im Unendlichen vermieden werden. — Man vergl. hierzu auch die Ausführungen in § 6.

überführen. Da γ als eine sehr langsam veränderliche Ortsfunktion neben $\mathfrak{A}$ und φ zu betrachten ist, vernachlässigen wir im folgenden die $\frac{\partial \gamma}{\partial x_k}$ enthaltenden Glieder gegenüber denjenigen mit $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_k}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$, d. h. die Gravitationskräfte gegenüber den elektromagnetischen Kräften. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir die Ableitungen der Lagrange-Funktion L

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} &= m_0 \left(1 + 3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2\right) v_k + \frac{e}{c} (1 + \gamma) A_k \\ \frac{\partial L}{\partial x_k} &= -e (1 - \gamma) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{e}{c} (1 + \gamma) v \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_k},\end{aligned}\quad (4.15)$$

und die Bewegungsgleichung (4.4) wird nach bekannten Umformungen:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + 3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2\right) v \right\} = -e (1 - \gamma) \text{grad } \varphi - \frac{e}{c} (1 + \gamma) \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - [v, \text{rot } \mathfrak{A}] \right\}. \quad (4.16)$$

Diese Gleichung nimmt eine besonders einfache und zugleich physikalisch bedeutsame Gestalt an, wenn wir im folgenden konsequent effektive Größen benutzen. Das Motiv liegt hierbei darin, daß wir durchweg eine Form der Bewegungsgleichung anstreben, welche derjenigen der gewöhnlichen Mechanik und Elektrodynamik analog gebildet ist.

Da die Φ_k beliebige Funktionen der allgemeinen (Gaußschen) Koordinaten sind, so unterliegen sie keiner Veränderung im Gravitationsfeld, oder — anders gesagt — es ist $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$ und $\varphi^* = \varphi$.²⁰⁾ Demgemäß können wir schreiben:

$$\mathfrak{E}^* = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c^*} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{B}^* = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad (4.17)$$

wobei

$$c^* = c (1 - 2\gamma) \quad (4.17a)$$

die erste Annäherung an die effektive Lichtgeschwindigkeit, vgl. (4.11 b), darstellt. Damit und mit Rücksicht auf (4.7) geht Gl. (4.16) schließlich in die durch die gewöhnliche Elektrodynamik nahegelegte Form

$$\frac{d}{dt} (m^* v) = e^* \left\{ \mathfrak{E}^* + \frac{1}{c^*} [v, \mathfrak{B}^*] \right\} \quad (4.16')$$

über, wobei wir

$$e^* = e (1 - \gamma) \quad (4.18)$$

als effektive Ladung aufzufassen haben (vgl. (3.8)).

Die Bewegungsgleichung (4.16') unterscheidet sich von derjenigen, die nach der gewöhnlichen Newtonschen Mechanik und Maxwell'schen Elektro-

²⁰⁾ Man kann sich das auch an einem Spezialfall leicht klarmachen. Beschränken wir uns auf elektrostatische Kräfte und auf den Fall, daß Quelle des elektrischen Feldes und Probekörper sich praktisch beim gleichen Gravitationspotential befinden (z. B. Atom), so können wir die Veränderung von φ im Gravitationsfeld auf eine solche von e zurückführen; in unserer Näherung haben wir nämlich dann nach (4.16) zu schreiben

$$\begin{aligned}e(1 - \gamma) \text{grad } \varphi &= e(1 - \gamma) \text{grad } \frac{e}{(1 + \gamma)r} = e^2(1 - 2\gamma) \text{grad } \frac{1}{r} = e^* \text{grad } \varphi^* \\ &= e^* \text{grad } \frac{e^*}{r} = e^{*2} \text{grad } \frac{1}{r}\end{aligned}$$

und damit [vgl. (4.18)]:

$$e^* = e(1 - \gamma), \quad \varphi^* = \varphi.$$

dynamik zu erwarten wäre, nur dadurch, daß die Konstanten m , c , e durch die effektiven Größen m^* , c^* , e^* gemäß (4.7), (4.17a) und (4.18) zu ersetzen sind. Damit haben wir genau dieselbe (fiktive) Änderung der physikalischen Grundgrößen im Gravitationsfeld aus dem Variationsprinzip (4.12) erhalten, die wir in § 3 auf dem heuristischen Wege erschlossen haben. Natürlich gelten damit auch alle dort abgeleiteten Folgerungen. Es ergibt sich jetzt auf einem unabhängigen Wege die Unveränderlichkeit der Naturkonstanten κ und $\hbar$ und der Feinstrukturkonstanten α im Gravitationsfeld (diese Größen sind also im Gegensatz beispielsweise zu c^* keine Feldgrößen). Insbesondere rechtfertigen wir hiermit nachträglich auch die angenäherte Form des Linienelementes (3.6) (erste Näherung), wenn wir Modelle des atomaren Aufbaues von Maßstäben und Uhren heranziehen; d. h. wir zeigen damit die innere Widerspruchsfreiheit unserer Überlegungen. —

Es ist nicht ohne Interesse, sich klarzumachen, daß die Beeinflussung von e und m_0 durch das Gravitationsfeld — und damit auch der spezifischen Ladung e/m_0 — genau von derselben Größenordnung ist und auf denselben Prinzipien beruht wie etwa die Beeinflussung von c , welche bekanntlich zu dem Effekt der Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne führt. Eine direkte Bestätigung der effektiven Werte von e^* und m^* ist wegen der Kleinheit der zu erwartenden Effekte bei Laboratoriumsversuchen nicht möglich; der Einfluß des Gravitationsfeldes äußert sich jedoch indirekt über den Aufbau der atomaren Systeme in der geringen Abweichung der Metrik von der pseudo-euklidischen (Minkowski-)Metrik, also beispielsweise in der spektralen Linienverschiebung im Gravitationsfeld. Prinzipiell sind in (statischen) Gravitationsfeldern nur solche Effekte nachweisbar, in welche Differenzen des Newtonschen Potentials an verschiedenen Raumstellen eingehen (s. Einführung). Im ganzen sind die Abweichungen von der Minkowski-Metrik im planetaren Raumgebiet außerordentlich klein und daher für die meisten Laboratoriumsexperimente bedeutungslos²¹⁾. Allein in der Astronomie wird eine solche Beobachtungsgenauigkeit erreicht, daß sogar ein Effekt zweiter Ordnung (die Perihelbewegung des Planeten Merkur) bestätigt werden konnte.

§ 5. Analyse der Perihelbewegung der Planeten

Obwohl A. Einstein schon in einer grundlegenden Arbeit zur allgemeinen Relativitätstheorie von 1915 die beobachtete Perihelbewegung des Planeten Merkur aus seinen Feldgleichungen der Gravitation quantitativ erklären konnte²²⁾, haben sich weder Einstein selbst noch andere Autoren seitdem um eine nähere Analyse dieses Effektes im Sinne der Relativität der Trägheit bemüht. Nachträglich versucht allerdings Einstein in seinen „Grundzügen der Relativitätstheorie“ eine Deutung der allgemein-relativistischen Bewegungsgleichung im Sinne von E. Mach, wonach die Trägheit eines Planeten mit Annäherung an die Sonne zunehmen müßte; jedoch sind

²¹⁾ Es ist jedoch in der letzten Zeit gelungen, die Rotverschiebung von Spektrallinien im Gravitationsfeld der Erde nachzuweisen (Mößbauer-Effekt). Siehe T. E. Cranshaw, J. P. Schiffer, A. B. Whitehead, *Physic. Rev.* Vol. 4, Nr. 4, February 15, 1960, S. 163; H. J. Hay, J. P. Schiffer, F. E. Cranshaw, T. A. Egelstaff, a. a. O. S. 165.

²²⁾ A. Einstein, *Berl. Ber.* (2), 831 (1915).

seine Gleichungen hinsichtlich der Größenordnung der berücksichtigten Terme so wenig konsequent (vgl. Fußnote ¹⁷), daß man in ihnen kaum eine Bestätigung des Machschen Gedankens erblicken kann und daran eine nähere Untersuchung der Perihelbewegung der Planeten anschließen könnte.

Wir schreiben zum Zwecke der Analyse des Problems die Bewegungsgleichung für den Planeten in einer solchen Form auf, daß sie nur Glieder bis zur 2. Ordnung, diese aber vollständig, enthält. Indem wir hierzu an Gl. (4.6') anknüpfen, haben wir mit Rücksicht auf die Bedeutung von m^* , Gl. (4.7):

$$\frac{d}{dt}(m^* v) = m^* \text{grad}(\gamma c^2) - (4\gamma - \beta^2) \text{grad}(\gamma c^2). \quad (5.1)$$

Der zu erwartende Effekt (Perihelbewegung) setzt sich demgemäß aus folgenden Teilen zusammen: aus dem Einfluß

- a) der Massenveränderlichkeit im Gravitationsfeld,
- b) der speziell-relativistischen Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse,
- c) der Korrektur der Newtonschen Gravitationskraft.

Um den Einfluß dieser Korrekturen einzeln feststellen zu können, gehen wir von der unkorrigierten Newtonschen Bewegungsgleichung des Planetenproblems aus und ergänzen diese schrittweise durch die genannten Korrekturen.

a) Massenveränderlichkeit im Gravitationsfeld

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für einen Planeten (erste Näherung)

$$\frac{dv}{dt} = \text{grad}(\gamma c^2), \quad \gamma = \frac{GM}{c^2 r} = \frac{a}{r} \quad (5.2)$$

besitzt die folgenden, in der weiteren Rechnung benötigten Integrale (r , φ ebene Polarkoordinaten)

$$\text{Flächensatz:} \quad r^2 \dot{\varphi} = F = \text{const.} \quad (5.2a)$$

$$\text{Energiesatz:} \quad \beta^2 - 2\gamma = 2E = \text{const.} \quad (5.2b)$$

Die Massenkorrektur im Gravitationsfeld wird berücksichtigt durch (5.2), vgl. (4.11a):

$$\frac{d}{dt}\{(1 + 3\gamma) v\} = (1 + 3\gamma) \text{grad}(\gamma c^2). \quad (5.3)$$

In Polarkoordinaten r , φ geschrieben, besagt Gl. (5.3):

$$\left(1 + \frac{3a}{r}\right)(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) - \frac{3a}{r^2}\dot{r}^2 + \left(1 + \frac{3a}{r}\right)\frac{a c^2}{r^2} = 0, \quad (5.4)$$

$$\left(1 + \frac{3a}{r}\right)(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) - \frac{3a}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0; \quad (5.5)$$

letztere Gl. (5.5) besitzt das Integral (Flächensatz in zweiter Näherung)

$$r^2 \dot{\varphi} (1 + 3\gamma) = F' = \text{const.} \quad (5.5a)$$

Multipliziert man (5.4) mit $\dot{r}$, (5.5) mit $r\dot{\varphi}$ und addiert, so folgt

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + \frac{3a}{r}\right) \beta^2 - \frac{2a}{r} - 3 \frac{a^2}{r^2} \right\} - \frac{3a}{r^2} \dot{r} \beta^2 = 0, \quad (5.6)$$

wobei $\beta^2 = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)/c^2$ ist und wofür wir im letzten Gliede wegen (5.2b) im Sinne unserer Näherung $2(E + \gamma)$ setzen dürfen. Damit läßt sich (5.6) integrieren; man erhält (Energiesatz in zweiter Näherung)

$$(1 + 3\gamma)\beta^2 - 2\gamma + 6E\gamma = 2E' = \text{const.} \quad (5.6a)$$

oder nach (5.2b)

$$(1 + 6\gamma)\beta^2 - 2\gamma - 6\gamma^2 = 2E'. \quad (5.6b)$$

Aus (5.5a) und (5.6b) folgt nunmehr nach der Substitution $s = 1/r$ in bekannter Weise die Differentialgleichung für die Planetenbahn:

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2E'c^2}{F'^2} + \frac{2GM}{F'^2}s - \left(1 - \frac{6G^2M^2}{c^2F'^2}\right)s^2. \quad (5.6c)$$

Mit den Abkürzungen

$$\alpha^2 = 1 - \frac{6G^2M^2}{c^2F'^2}, \quad k = \frac{F'^2\alpha^2}{GM}, \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2E'c^2k^2}{F'^2\alpha^2} \quad (5.7)$$

ergibt sich daraus die Bahngleichung

$$s = \frac{1}{r} = \frac{1}{k} \{1 + \varepsilon \cos \alpha(\varphi - \varphi_0)\} \quad (5.8)$$

(φ_0 Integrationskonstante): Sie entspricht für $\varepsilon < 1$ ($E' < 0$) einer langsam präzedierenden Kepler-Ellipse, wobei das Perihel bei einem Umlauf um den Winkel

$$\delta = \pi(1 - \alpha^2) = 6\pi \frac{G^2M^2}{c^2F'^2} \quad (5.9)$$

vorrückt.

Die Massenveränderung im Gravitationsfeld ergibt nach Gl. (5.9) bereits den vollen Betrag für die Perihelbewegung²³⁾. Die beiden folgenden Korrekturen müssen daher Beiträge ergeben, die sich gegenseitig aufheben.

b) Zusätzliche Berücksichtigung des speziell-relativistischen Geschwindigkeitseinflusses auf die Masse

Die Bewegungsgleichung lautet hierfür:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + 3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2\right) \mathbf{v} \right\} = \left(1 + 3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2\right) \text{grad}(\gamma c^2) \quad (5.10)$$

oder nach (5.2b) entsprechend unserer Näherung

$$\frac{d}{dt} \{(1 + 4\gamma) \mathbf{v}\} + E \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (1 + 4\gamma) \text{grad}(\gamma c^2) + E \text{grad}(\gamma c^2). \quad (5.10')$$

Da wir nach (5.2) bis auf Größen höherer als zweiter Ordnung

$$E \frac{d\mathbf{v}}{dt} = E \text{grad}(\gamma c^2)$$

setzen dürfen, gilt in unserer Näherung

$$\frac{d}{dt} \{(1 + 4\gamma) \mathbf{v}\} = (1 + 4\gamma) \text{grad}(\gamma c^2). \quad (5.11)$$

²³⁾ A. Einstein, Ann. Physik **49**, 818ff. (1916).

Der Vergleich von (5.11) mit (5.3) zeigt, daß die Perihelbewegung um einen Faktor $4/3$ gegenüber (5.9) vergrößert wird, d. h. daß im Ergebnis der Geschwindigkeitseinfluß auf die Masse $1/3$ des Gesamtbetrages der Perihelbewegung liefert.

c) Integration der bis zu Größen zweiter Ordnung exakten Bewegungsgleichung

Die bis zu Größen 2. Ordnung korrekte Bewegungsgleichung (5.1) schreiben wir in der Form (4, 6):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + 3\gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) \dot{\mathbf{v}} \right\} = \left(1 - \gamma + \frac{3}{2} \beta^2 \right) \text{grad } (\gamma c^2). \quad (5.12)$$

Hiermit ist in unserer Näherung nach (5.2b) gleichwertig:

$$\frac{d}{dt} \{ (1 + 4\gamma) \dot{\mathbf{v}} \} = (1 + \beta^2) \text{grad } (\gamma c^2). \quad (5.12')$$

In Polarkoordinaten r, φ ergibt sich hieraus, vgl. auch (5.4) und (5.5):

$$\left(1 + \frac{4a}{r} \right) (\dot{r} - r \dot{\varphi}^2) - \frac{4a}{r^2} \dot{r}^2 + (1 + \beta^2) \frac{a c^2}{r^2} = 0, \quad (5.13)$$

$$\left(1 + \frac{4a}{r} \right) (2 \dot{r} \dot{\varphi} - r \ddot{\varphi}) - \frac{4a}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0; \quad (5.14)$$

letztere Gleichung besitzt das Integral (Flächensatz)

$$r^2 \dot{\varphi} (1 + 4\gamma) = F'' = \text{const.} \quad (5.14a)$$

Durch Multiplikation von (5.13) mit $\dot{r}$ und (5.14) mit $r \dot{\varphi}$ und nachfolgender Addition erhält man

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + \frac{4a}{r} \right) \beta^2 - 2 \frac{a}{r} \right\} - 2 \frac{a}{r^2} \dot{r} \beta^2 = 0, \quad (5.15)$$

und durch die Substitution $\beta^2 = 2(E + \gamma)$ im letzten Glied und darauffolgender Integration (Energiesatz):

$$(1 + 4\gamma) \beta^2 - 2\gamma + 4E\gamma + 2\gamma^2 = 2E'' = \text{const} \quad (5.15a)$$

oder nach (5.2b)

$$(1 + 6\gamma) \beta^2 - 2\gamma - 2\gamma^2 = 2E''. \quad (5.15b)$$

Aus (5.14a) und (5.15b) ergibt sich analog zu a) mit $s = 1/r$

$$\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2E'' c^2}{F''^2} + (1 + 2E'') \frac{2G M}{F''^2} s - \left(1 - \frac{6G^2 M^2}{c^2 F''^2} \right) s^2. \quad (5.15c)$$

Der Vergleich von (5.15c) mit (5.6c) und der nachfolgenden Rechnung zeigt völlige Übereinstimmung der Ergebnisse (bis auf den unwesentlichen Wert der Konstanten k); damit erhalten wir für die Perihelbewegung in der hier angestrebten Näherung

$$\delta = 6\pi \frac{G^2 M^2}{c^2 F''^2}. \quad (5.16)$$

Zusammenfassend können wir also sagen, daß sich die gesamte Perihelbewegung folgendermaßen zusammensetzt: Die Massenveränderlichkeit im Gravitationsfeld liefert bereits den vollen Betrag derselben, die Massenveränderlichkeit im Sinne der speziellen Relativitätstheorie ein weiteres

Drittel, während die Korrektur der Newtonschen Gravitationskraft dem Betrage nach ebenfalls ein Drittel liefert, jedoch die Periheldrehung um diesen Betrag verkleinert.

§ 6. Geschichtliches zum Machschen Prinzip

In den vorangehenden Abschnitten haben wir gezeigt, daß die Untersuchung des Einflusses des Gravitationsfeldes auf physikalische Größen notwendig auch eine Veränderung der Masse im Gravitationsfeld ergibt. Ein solcher Einfluß des Gravitationsfeldes auf die „effektive“ Masse eines Körpers ist von Einstein seit Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie erwartet und im Sinne der „Relativität der Trägheit“ gedeutet worden. Es ist von ihm klar ausgesprochen worden, daß „die Trägheit in einer Art Wechselwirkung der Körper ihren Ursprung“ haben müsse und daß es daher in einem vollkommen „leeren“ Raume auch keine Trägheit geben könne. Daher ist auch zu erwarten, daß die Trägheit eines Körpers mit Annäherung an größere Massenansammlungen zunimmt. Einsteins eigene Untersuchungen zu dieser Frage sind aber, wie bereits erwähnt (S. 394), in quantitativer Hinsicht wenig befriedigend (die tatsächliche Zunahme der effektiven Masse im Gravitationsfeld ist das dreifache des von Einstein aus den Bewegungsgleichungen herausdiskutierten Betrages, § 3–5). Auch hat die effektive Masse nicht die Eigenschaft, in unendlicher Entfernung von gravitationserzeugenden Massen gegen Null abzunehmen²⁴⁾. Dennoch existiert der von Einstein vermutete Effekt mit den in dieser Arbeit angegebenen Modifikationen.

Einstein war von vornherein geneigt, die zu erwartende Veränderung der trägen Masse eines Körpers im Gravitationsfeld anderer gravitationserzeugender Massen im Sinne der Machschen Gedanken zur Kritik der Newtonschen Mechanik zu interpretieren²⁵⁾. Da jedoch die Bedeutung des nach Einstein sogenannten „Machschen Prinzips“ für die Theorie der Naturerscheinungen dadurch sehr erschwert wird, daß man unter diesem Titel herkömmlich recht verschiedene Dinge zusammenfaßt, so scheint es uns angezeigt, an die geschichtliche Entwicklung des sog. Machschen Prinzips zu erinnern, um auf diesem Wege die ursprüngliche und eigentliche Bedeutung dieses Prinzips gegen spätere Zusätze und Interpretationen abzuheben.

²⁴⁾ Siehe Anm. ¹⁹⁾ S. 390.

²⁵⁾ E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, S. 221ff. — Seine diesbezügliche Auffassung hat A. Einstein wohl zuerst auf der 85. Naturforscher-Versammlung in Wien (1913) klar zum Ausdruck gebracht. Er sagt: „Es ist dies Ergebnis (die Massenzunahme eines Probekörpers in der Nähe größerer Massenansammlungen) recht befriedigend, wenn man sich folgendes überlegt. Von Bewegung, also auch Beschleunigung eines Körpers *A* an sich zu reden, hat keinen Sinn. Man kann nur von Bewegung bzw. Beschleunigung eines Körpers *A* relativ zu anderen Körpern *B*, *C* usw. sprechen. Was in kinematischer Hinsicht von der Beschleunigung gilt, das dürfte auch von dem Trägheitswiderstande gelten, den die Körper einer Beschleunigung entgegensetzen; es ist a priori zu erwarten, wenn auch nicht gerade notwendig, daß der Trägheitswiderstand nichts anderes sei als ein Widerstand gegen Relativbeschleunigung des betrachteten Körpers *A* gegenüber der Gesamtheit aller übrigen Körper *B*, *C* usw. Es ist wohl bekannt, daß E. Mach in seiner Geschichte der Mechanik diesen Standpunkt zuerst mit aller Schärfe und Klarheit vertreten hat, so daß ich hier einfach auf seine Ausführungen verweisen kann ... ich will die skizzierte Auffassung als ‚Hypothese von der Relativität der Trägheit‘ bezeichnen.“ [Physik. Z. **14**, 1249 (1913)].

Dem Aufkommen des Mach-Prinzips liegt eine einfache Erfahrungstatsache zugrunde: Die Tatsache nämlich, daß Inertialsysteme, für welche die Newtonsche Mechanik näherungsweise Gültigkeit besitzt, bezüglich des „Fixsternsystems“ mit großer Annäherung rotationsfrei sind. Auf dieses Faktum hat vor allem E. Mach hingewiesen; er hat mit Recht hervorgehoben, daß eine so auffallende Tatsache in den Grundlagen der Newtonschen Mechanik nicht verankert ist und diesen Umstand zum Ausgangspunkt seiner Kritik an Newtons Begriff des „absoluten Raums“ (und ebenso der „absoluten Zeit“) gemacht. Mach hat die Vermutung ausgesprochen, daß dieses Zusammenfallen eines „dynamisch“ und andererseits eines rein „kinematisch“ definierten Bezugssystems nicht zufällig sein könne. In dieser Vermutung (bzw. auch in der daran anschließenden Kritik) hat man ohne Zweifel den Ursprung des Machschen Prinzips zu erblicken. Als Einstein nach Abschluß der speziellen Relativitätstheorie, welche die Newtonsche Vorstellung eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit als unhaltbar erwiesen hatte, zur Ausgestaltung der allgemeinen Relativitätstheorie überging, war es für ihn naheliegend, das „Machsche Prinzip“ als heuristisches Prinzip für die Erweiterung seiner Theorie zu benutzen²⁶⁾. Aber die weitere Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie hat gezeigt, daß zu ihrer Begründung das Mach-Prinzip entbehrlich war. Weder die Aufstellung der allgemein-kovarianten Feldgleichungen der Gravitation haben mit dem Mach-Prinzip zu tun, noch sind die bekannt gewordenen Lösungen dieser Gleichungen durchweg in Einklang mit diesem Prinzip. Daher ist die Bedeutung des Mach-Prinzips für die Physik überhaupt zweifelhaft geworden, und es selbst für viele Physiker in Mißkredit geraten.

Trotz dieser berechtigten Einwände bleibt bestehen, daß die obengenannte astronomische Tatsache weder durch die Newtonsche Mechanik noch auch durch die allgemeine Relativitätstheorie eine Erklärung findet. Die moderne astronomische Forschung hat die Situation eher verschärft als gemildert. Die heutige Kenntnis der Anordnung der galaktischen Systeme im Weltraume hat in zunehmendem Maße erwiesen, wie genau „Trägheitskompaß“ und „Fixsternkompaß“ (orientiert an den extragalaktischen Systemen) übereinstimmen. In diesem Umstand möchten wir einen entscheidenden Hinweis dafür erblicken, daß das Machsche Prinzip in seiner ursprünglichen *kosmologischen* Bedeutung auch heute nicht beiseite geschoben werden kann. Damit wird aber zugleich die Frage aufgeworfen, worin die genannte Tatsache physikalisch verankert ist. Unseres Erachtens hat Einstein auf diese Frage bereits die richtige Antwort gegeben. Da nämlich die Festlegung der Metrik (Inertialsysteme) im allgemeinen nicht allein durch die Verteilung der Materie im Raume bestimmt ist, sondern außerdem noch durch Grenzbedingungen des metrischen Feldes im räumlich Unendlichen, so kann eine im Einklang mit den Machschen Gedanken stattfindende Festlegung der Metrik nur dann erfolgen, wenn die Grenzbedingungen im Unendlichen überhaupt entfallen. Es ist dann selbstverständlich, daß die Metrik und damit die Trägheitserscheinungen (ebenso wie die Lichtausbreitung) bei gegebenen Feldgleichungen (mit oder besser ohne kosmologisches Λ -Glieder) ausschließlich durch den „Materietensor“ $T_{\mu\nu}$ bedingt sind, womit das Machsche Prinzip

²⁶⁾ A. Einstein, Ann. Physik **43**, 818ff. (1916).

auch einen unmittelbar faßbaren konkreten Sinn erhält. Hiernach müßte das Universum seiner räumlichen Ausdehnung nach endlich und geschlossen sein²⁷⁾. Es genüge hier zu betonen, daß das Machsche Prinzip in seiner eigentlichen Bedeutung — im Gegensatz zu späteren Ausdeutungen — ein kosmologisches Prinzip ist, das sich auf den globalen (topologischen) Zusammenhang des Universums im Großen bezieht. Da es unzählige kosmologische Modelle, aber nur ein wirkliches Universum gibt, so wird dem Mach-Prinzip die Rolle eines Auswahlprinzips zufallen, das aus der großen Anzahl möglicher Modelle einige wenige als physikalisch in Betracht kommend aussondert²⁸⁾. Es ist hierin zugleich enthalten, daß das Mach-Prinzip in diesem Sinne kein eigentlich „konstitutives“ Prinzip der Erfahrung sein kann, das (wie z. B. die Forderung der allgemeinen Kovarianz der Feldgleichungen) zur Ableitung von Naturgesetzen benutzt werden kann, sondern daß es eher den Charakter eines „regulativen“ Prinzips (im Sinne Kants) besitzt. Hierin vor allem scheint uns die Sonderstellung des Machschen Prinzips gegenüber anderen physikalischen Prinzipien begründet zu sein²⁹⁾.

Es ist andererseits jedoch zunächst kein logisch *zwingender* Grund auffindig zu machen, die als Ausdruck der „Relativität der Trägheit“ aufgefaßten Effekte (Veränderung der Masse im Gravitationsfeld) in unmittelbarem Zusammenhang mit der kosmologischen Fragestellung zu sehen. Wir müssen hierin vielmehr eine freie Interpretation der Machschen Gedanken durch

²⁷⁾ Daß diese Möglichkeit tatsächlich besteht, hat Einstein bekanntlich in seiner ersten kosmologischen Arbeit vom Jahre 1917 gezeigt. Damals war die kosmische Expansion noch nicht bekannt, und Einstein war daher genötigt, seinen ursprünglichen Feldgleichungen ein kosmologisches Glied $\Lambda g_{\mu\nu}$ hinzuzufügen, um auf diese Weise ein statisches (übrigens instabiles) Universum zu erhalten. Läßt man das kosmologische Glied fallen, so sind nur expandierende (oder sich kontrahierende) Weltmodelle als Lösungen der Feldgleichungen möglich. Unter diesen gibt es ein einziges, das dem Homogenitätspostulat und dem Machschen Prinzip genügt (expandierender Kugelkosmos).

²⁸⁾ Weltmodelle, welche sich in extremer Weise „antimachisch“ verhalten, sind einerseits der de-Sitter-Kosmos, andererseits der Gödel-Kosmos. Im ersteren Falle haben wir einen völlig „leeren“ Kosmos mit Expansion; im letzteren Falle einen Kosmos, in dem der Trägheitskompaß gegenüber der Materie (von konstanter Dichte) an jeder Stelle gleichförmig rotiert. Beide Weltmodelle sind exakte Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen mit kosmologischem Glied und besitzen unendliche räumliche Ausdehnung. Neuerdings haben E. Schücking und I. Ozsváth als Lösung der quellenfreien Feldgleichungen $R_{ik} = 0$ ein nicht-euklidisches Weltmodell angegeben, welches nur von Gravitationsstrahlung erfüllt ist; auch dieses Modell ist natürlich antimachisch. Alle diese kosmologischen Modelle widersprechen der Erfahrung (vgl. W. de Sitter, *Monthly Notices R. A. S.* **76**, 699 (1916); **77**, 155 (1916); **78**, 1 (1917). K. Gödel, *Rev. mod. Physics* **21**, 447 (1949). I. Ozsváth u. E. Schücking, unveröffentlicht).

²⁹⁾ Der tiefste Grund für die Notwendigkeit, die Grenzbedingungen im Unendlichen fallen zu lassen, dürfte vermutlich darin liegen, daß es nicht möglich ist, diese Grenzbedingungen in einer kovariant befriedigenden Weise zu formulieren. Verlangt man von einer kosmologischen Theorie, daß sie nicht nur hinsichtlich der Feldgleichungen, sondern auch hinsichtlich der Grenzbedingungen der Forderung der Kovarianz genügt, so scheint diese Forderung unendliche „offene“ Weltmodelle auszuschließen. Man würde dann auf einem vom Machschen Prinzip gänzlich unabhängigen Wege dazu geführt, nur geschlossene endliche Weltmodelle zuzulassen. Sollte sich diese Vermutung bestätigen, so wäre die Erfüllung des Machschen Prinzips eine direkte Folge der konsequent durchgeführten Kovarianzforderung. Hinweise hierzu bei G. Beck, *Handbuch der Physik* **4**, S. 383ff. (Springer 1929) und bei Ch. Soergel-Fabrizius, *Freiburger Dissertation* 1959.

Einstein erblicken, während sich bei Mach Andeutungen dieser Art nicht vorfinden³⁰⁾. Um alle Zweifel darüber auszuschließen, wie Einstein die Machschen Ideen ausgelegt hat, seien hier einige charakteristische Sätze aus seiner zusammenfassenden Darstellung „Grundzüge der Relativitätstheorie“³¹⁾ wiedergegeben:

„Zweitens aber macht es die Relativitätstheorie wahrscheinlich, daß Mach auf dem richtigen Wege gewesen ist mit seinem Gedanken, daß die Trägheit auf einer Art Wechselwirkung der Materie beruhe. Wir wollen nämlich im folgenden nachweisen, daß nach unseren Gleichungen träge Massen (wenn auch sehr schwach) im Sinne der Relativität der Trägheit aufeinander wirken. Was muß im Sinne des Machschen Gedankens erwartet werden?

1. Die Trägheit eines Körpers muß zunehmen, wenn man ponderable Massen in seiner Umgebung anhäuft.

2. Ein Körper muß eine beschleunigende Kraft erfahren, wenn man Massen in seiner Umgebung beschleunigt, und zwar muß die Kraft mit jener Beschleunigung gleichgerichtet sein.

3. Ein rotierender Hohlkörper muß in seinem Innern ein „Coriolis-Feld“ erzeugen, welches bewegte Körper im Sinne der Rotation ablenkt, als auch ein radiales Zentrifugalfeld.

Wir werden nun zeigen, daß nach unserer Theorie diese drei nach Machs Gedanken zu erwartenden Effekte tatsächlich vorhanden sein müssen, allerdings in so kleinem Betrage, daß an eine Bestätigung durch Laboratoriumsexperimente nicht gedacht werden kann.“

³⁰⁾ Die Verfasser verdanken der Freundlichkeit von Herrn Prof. Schardin die Kenntnis eines Briefes von Albert Einstein an Ernst Mach vom 25. 6. 1913 (im Besitze des Ernst-Mach-Instituts in Freiburg i. Br.), aus welchem mit großer Deutlichkeit hervorgeht, in welchem Zusammenhang Einstein die Folgerungen aus der (damals noch nicht in die endgültige Fassung gebrachten) allgemeinen Relativitätstheorie mit den Machschen Untersuchungen zur Mechanik gesehen hat (s. E. Machs Kritik zum Newtonschen Eimerversuch in „Die Mechanik in ihrer Entwicklung“, S. 221ff., 1897). Einstein schreibt:

„Dieser Tage haben Sie wohl meine neue Arbeit über Relativität und Gravitation erhalten, die nach unendlicher Mühe und quälendem Zweifel nun endlich fertig geworden ist. Nächstes Jahr bei der Sonnenfinsternis soll sich zeigen, ob die Lichtstrahlen an der Sonne gekrümmt werden, ob m. a. W. die zugrunde gelegte fundamentale Annahme von der Äquivalenz von Beschleunigung des Bezugssystems einerseits und Schwerfeld andererseits wirklich zutrifft.

Wenn ja, so erfahren Ihre genialen Untersuchungen über die Grundlagen der Mechanik — Plancks ungerechtfertigter Kritik zum Trotz — eine glänzende Bestätigung. Denn es ergibt sich mit Notwendigkeit, daß die Trägheit in einer Art Wechselwirkung der Körper ihren Ursprung hat, ganz im Sinne Ihrer Überlegungen zum Newtonschen Eimer-Versuch. ...“

Es folgt dann die Erwähnung derselben Konsequenzen aus der Relativitätstheorie wie oben anschließend im Text. Die angeführte Briefstelle läßt erkennen, daß Einstein seine Theorie von Anfang an in solchem Grade als einheitlich angesehen hat, daß der Nachweis der Lichtablenkung auch die Bestätigung aller übrigen Konsequenzen der Theorie sowie ihrer allgemeinen Grundlagen nach sich zieht: also auch die Vorstellung, „daß die Trägheit in einer Art Wechselwirkung der Körper ihren Ursprung“ habe. Man vgl. hierzu auch H. Hönl „Ein Brief Albert Einsteins an Ernst Mach“, Physikal. Blätter, November 1960.

³¹⁾ A. Einstein, „Grundzüge der Relativitätstheorie“ (The Meaning of Relativity), S. 64 (Vieweg 1956).

Punkt 1 enthält das hier ausführlich erörterte Problem der Beeinflussung der Masse durch das Gravitationsfeld³²⁾. Die letzte Bemerkung bezüglich der Kleinheit der Effekte ist nicht ganz richtig, sofern man unter „Laboratoriumsexperimenten“ auch astronomische Beobachtungen versteht. Da die Veränderungen aller physikalischen Größen im Gravitationsfeld untereinander zusammenhängen, so kann man die allgemein-relativistischen Effekte erster Ordnung (Rotverschiebung und Lichtablenkung im Gravitationsfeld) im Sinne unserer Überlegungen durchaus mit der geringen Veränderung der Masse in Zusammenhang bringen.

Besonderes Interesse beansprucht aber Punkt 3 (auf Punkt 2 soll hier nicht weiter eingegangen werden). Es handelt sich hierbei um den sogenannten Thirring-Effekt³³⁾, wonach „im Innern eines rotierenden Hohlkörpers ein senkrecht zur Rotationsachse bewegter Massenpunkt im Sinne der Rotation des Hohlkörpers abgelenkt wird. Die oben angeführte Zentrifugalwirkung im Innern von rotierenden Hohlkörpern folgt, wie Herr Thirring gezeigt hat, ebenfalls aus der Theorie“³⁴⁾. Dieser Effekt scheint unmittelbar auf das Machsche Prinzip hinzuweisen, und man hat in ihm eine Bestätigung der Machschen Ideen erblicken wollen (Analogie zum Newtonschen Eimer-Versuch). Das Unbefriedigende dieser Deutung liegt aber darin, daß H. Thirring das Problem im Sinne seines Näherungsverfahrens so ansetzt, daß das metrische Feld im räumlich Unendlichen in die Grenzwerte der pseudo-euklidischen Metrik übergeht, so daß der Hohlkörper eigentlich relativ zum leeren „absoluten“ Raume rotiert.

Um den Zusammenhang mit Mach zwingender erscheinen zu lassen, ist die Thirring'sche Rechnung von Frau Ch. Soergel-Fabricius in folgender Weise modifiziert worden³⁵⁾: Man gehe statt von der euklidischen Metrik des leeren Raumes von der Metrik im geschlossenen Einstein-Universum als „Grundmetrik“ aus. Dann sondere man überall einen kleinen Bruchteil der Materie ab und lasse diesen mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um eine zuvor gewählte räumliche Geodätische „starr“ rotieren. Nach Bestimmung des Gravitationsfeldes in erster Näherung zur Einstein-Metrik diskutiere man die Bewegung eines Probe-Körpers daraufhin, ob sich der Einfluß der Rotation

³²⁾ Die anfänglich von Einstein erhobene Forderung, daß die Masse eines Probekörpers bei unendlicher Entfernung von allen übrigen Massen des Universums gegen Null abnehmen muß, scheint uns nicht mehr gerechtfertigt, da sie einen Widerspruch einschließt (vgl. hierzu Anm. ¹⁹⁾, S. 390). Denn damit eine unendliche Entfernung des Probekörpers von allen Massen überhaupt möglich sei, muß das Universum selbst notwendig unendlich ausgedehnt sein und dürfen sich außerhalb einer gewissen endlichen Sphäre keine Massen mehr befinden; ein solches Universum wird aber erst durch Grenzbedingungen im Unendlichen determiniert und ist daher nach dem Machschen Prinzip auszuschließen. Oder aber: das Universum ist von endlicher Ausdehnung, dann ist es eo ipso unmöglich, einen Körper in unendlicher Entfernung von allen übrigen Massen zu bringen. — Dagegen könnte man in der Tatsache, daß im ersteren Falle die Masse des Probekörpers im Unendlichen nicht gegen Null, sondern gegen einen endlichen Grenzwert abnimmt, im Sinne der Relativität der Trägheit einen weiteren unabhängigen Einwand gegen ein unendlich ausgedehntes Universum entnehmen. Es ist freilich nicht zu erwarten, daß ein Universum das wegen der Grenzbedingungen im Unendlichen dem Machschen Prinzip widerspricht, mit der Relativität der Trägheit im Einklang ist.

³³⁾ H. Thirring, *Physik. Z.* **19**, 33 (1918); **22**, 29 (1921).

³⁴⁾ A. Einstein, *Grundzüge der Relativitätstheorie*, Vieweg 1956, 3. Aufl., S. 66.

³⁵⁾ Ch. Soergel-Fabricius, *Freiburger Dissertation* 1959; Auszug davon in *Z. Physik*, **159**, 541 (1960).

durch Coriolis- und Zentrifugalkräfte beschreiben läßt und wie diese Zusatzkräfte zustande kommen. Man kann das Ergebnis der Untersuchung von Frau Soergel-Fabricsius nun sehr einfach dahin zusammenfassen, daß Form und Größe dieser Zusatzkräfte genau diejenige ist, die man auf Grund des Machschen Prinzips quantitativ erwarten würde. Grenzbedingungen entfallen im Einstein-Universum, so daß die gesamten Trägheitswirkungen auf die innere Wechselwirkung der Materie zurückzuführen sind.

Die Rechnungen von Frau Soergel-Fabricsius scheinen uns nicht nur deswegen bedeutungsvoll, weil sie den Machschen Ideen eine konkretere Gestalt geben, sondern vor allem auch deswegen, weil man an diesem Beispiel deutlich übersieht, wie die beiden Gedankenreihen, die man herkömmlich mit dem Machschen Prinzip in Verbindung bringt, innerlich zusammenhängen: die als „Relativität der Trägheit“ aufgefaßten Effekte mit dem kosmologischen Problem. Es wird damit auch ersichtlich, daß die Gesamtheit der Einsteinschen Anschauungen tatsächlich aus einer einheitlichen Quelle stammt.

Es möge in diesem Zusammenhang noch besonders darauf hingewiesen werden, daß es auch bei Zugrundelegung der Hypothese von der Relativität der Trägheit einen guten physikalischen und zum mindesten praktischen Sinn hat, von einer „absoluten Rotation“ zu sprechen. Denn es gibt kosmologische Modelle mit nicht verschwindender Dichte (z. B. statischer Einstein-Kosmos), bei denen sich im wesentlichen (d. h. bis auf triviale Koordinatentransformationen) nur auf eine Weise ein axialsymmetrisches Koordinatensystem einführen läßt, so daß bezüglich dieses die gesamte Materie ruht und keine Coriolis- und Zentrifugalkräfte auftreten³⁶). Ein solches System übernimmt näherungsweise die Rolle eines Inertialsystems der gewöhnlichen Theorie; bezüglich jedes anderen, gegenüber diesem ausgezeichneten System „rotierenden“ Bezugssystems treten sofort die bekannten „Scheinkräfte“ auf. Es bereitet aber bei einem solchen kosmologischen Modell prinzipiell keine Schwierigkeit, das Auftreten dieser Kräfte auf Wechselwirkungen der Materie zurückzuführen. — Es hat bei vielen Modellen sogar einen konkreten Sinn, den Begriff der „absoluten Geschwindigkeit“ aufrechtzuerhalten. Als Beispiele betrachten wir die nicht-stationären Weltmodelle mit isotroper Expansion bzw. Kontraktion. Bei diesen Modellen gilt für die Pekuliarbewegung (translatorische Trägheitsbewegung isolierter Massen) das einfache Gesetz $pR = \text{const}$, wobei $p = p(t)$ den „bezüglich des Substrats“ gemessenen Impuls, $R = R(t)$ den zeitlich veränderlichen (mittleren) Krümmungsradius des Kosmos bedeutet³⁷). Das Substrat selbst hat an jedem Orte und zu jeder Zeit einen bestimmten Bewegungszustand, der mit demjenigen der Ruhe gleichgesetzt werden kann. Dieses „Ruhsystem“ ist physikalisch offenbar ausgezeichnet; denn Massenpunkte, die bezüglich dieses Systems keine Geschwindigkeit aufweisen, verändern ihren Bewegungszustand nicht ($p(t) = 0$). Die Tatsache, daß der auf das Substrat bezogene Impuls (und daher auch die Geschwindig-

³⁶) Es gilt andererseits nicht der Satz, daß bei verschwindender Bewegung Coriolis- und Zentrifugalkräfte nicht auftreten. Beispiele hierfür sind einerseits der Gödel-Kosmos (ruhende Materie konstanter Dichte, überall Vorhandensein von Coriolis-Kräften), andererseits das „rotierende Laboratorium“ im leeren euklidischen Raume (keine Materie, also auch keine Bewegung, $T_{ik} = 0$). Vgl. hierzu Ch. Soergel-Fabricsius, Z. Physik, im Erscheinen.

³⁷) H. Hönl, Ann. Physik 6, 169 (1949).

keit) bei Expansion des Kosmos im allgemeinen (für $p > 0$) abnimmt, bei Kontraktionen zunimmt, kann im Sinne des Machschen Prinzips sehr wohl als die Wirkung einer Induktion der umgebenden Materie (des materiellen Substrats) auf den Massenpunkt verstanden werden (es handelt sich dabei um einen Effekt, wie er oben unter Punkt 2 (S. 400) beschrieben worden ist)³⁸⁾. Bei der Expansion eines Kosmos ohne Materie (wie beim de-Sitter-Kosmos, bei dem der Bewegungszustand des Substrats dennoch überall bestimmt ist) würde eine derartige physikalische Deutung natürlich hinfällig sein. Das Paradoxe des Begriffs „absolute Geschwindigkeit“ liegt hierbei darin, daß auch in diesem Falle ein solcher Begriff kinematisch (d. h. bezüglich des materiellen gewordenen „Substrats“) noch immer definiert werden kann³⁹⁾. Bei dieser

³⁸⁾ Das für die Expansion gültige Gesetz $p R = \text{const.}$ kann in einfacher Weise kinematisch abgeleitet werden (a. a. O.). In einem gegenüber dem Substrat bewegten Koordinatensystem, in welchem der bewegte Massenpunkt (Nebel mit Pekuliarbewegung) in Ruhe ist, äußert sich die kosmische Expansion als ein „Induktionseffekt“, entsprechend dem Glied $-dg/dt$ in Gl. (3.25). Es ist nämlich in einem endlichen geschlossenen Universum $m_0 \int dg$ von der Größenordnung $\frac{\kappa M}{R} p$ (m_0 Masse des Nebels, M Gesamtmasse des Universums, R mittlerer Krümmungsradius, $p = m_0 v$, $|v|$ mittlere Geschwindigkeit der den Nebel umgebenden bewegten Materie). Wegen der für ein endliches Universum größenordnungsmäßig gültigen Beziehung $\kappa M \simeq R$ wird daher

$$\dot{p} = m_0 \frac{d}{dt} \int dg \simeq - \frac{\dot{R}}{R} p.$$

Vermutlich läßt sich auf diesem Wege die Beziehung $p R = \text{const.}$ auch in Strenge dynamisch begründen. Es ist charakteristisch für das Machsche Prinzip, daß kinematische und dynamische Erklärung im Ergebnis übereinstimmen.

³⁹⁾ Der de-Sitter-Kosmos kann als ein expandierender euklidischer Raum aufgefaßt werden. Das Linienelement ist

$$ds^2 = -F^2(t) (d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2) + c^2 dt^2, \quad F = e^{\frac{t}{T}}$$

(die charakteristische Zeitkonstante T ist mit der kosmologischen Konstanten Λ gemäß $T = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ verknüpft). Ein bestimmtes Element des materiellen Substrats wird durch ein konstantes Wertetripel ξ_1, ξ_2, ξ_3 gekennzeichnet. Das Gesetz der Trägheitsbewegung einer isolierten Masse ergibt sich aus $\delta \int ds = 0$ bzw. aus dem Hamilton-Prinzip:

$$\delta \int L dt = 0, \quad L = \sqrt{1 - F^2(t) \frac{\dot{\xi}^2}{c^2}}; \quad \dot{\xi} = \sqrt{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2}.$$

$F(t) d\xi = ds_0$ ist der natürlich gemessene infinitesimale Abstand zweier Raumstellen zur Zeit t , daher $F(t) \dot{\xi} = v$ die natürlich gemessene Geschwindigkeit. Da ξ in $L(\xi, \dot{\xi})$ nicht explizite auftritt, ist das Gesetz der Trägheitsbewegung

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F^2 \dot{\xi}}{\sqrt{1 - F^2 \frac{\dot{\xi}^2}{c^2}}} = F(t) p = \text{const.}$$

(p Impuls der Masse 1) oder auch

$$p = p_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{T}},$$

wenn p_0 der Anfangsimpuls zur Zeit $t = t_0$ ist. Die „absolute“ Geschwindigkeit v gemessen mit natürlichen Maßstäben und Uhren bezüglich des „Substrats“ nimmt also zeitlich ebenfalls exponentiell ab.

„an sich“ möglichen Begriffsbildung hat man sich aber von dem ursprünglichen Begriff der Geschwindigkeit, der natürlich ein Relationsbegriff ist — d. h. sich auf Wahrnehmung eines materiell aufweisbaren Bezugskörpers gründet —, bereits so weit entfernt, daß derartige Begriffe und Vorstellungen nicht anders als „unnatürlich“ oder „unphysikalisch“ empfunden werden können⁴⁰).

Aus diesen Überlegungen dürfen wir wohl den Schluß ziehen, daß es unter der großen Mannigfaltigkeit exakter Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie nur wenige gibt, welche sowohl hinsichtlich der empirischen Tatsachen als auch hinsichtlich der a priori an eine Theorie zu stellenden Forderungen für die Beschreibung der wirklichen Verhältnisse in Betracht kommen. Bei der hier notwendig zu treffenden Auswahl wird aber das Machsche Prinzip einen wichtigen Fingerzeig geben können. —

Wir könnten unsere Ausführungen an dieser Stelle beschließen, wenn nicht neuerdings Auffassungen vertreten worden wären, welche dem Geiste der allgemeinen Relativitätstheorie ganz entgegengesetzt sind und das Machsche Prinzip rein negativ bewerten. Da es sich hier um ein Gedankengut handelt, das man nicht ohne triftige Gründe aufgeben sollte, so mögen hierzu noch einige allgemeine Bemerkungen folgen.

Sämtliche auf das Planeten- und Milchstraßensystem bezüglichen, von der allgemeinen Relativitätstheorie vorausgesagten Effekte sind außerordentlich „klein“ (und daher experimentell auch noch nicht mit ausreichender Genauigkeit festgestellt), d. h. die Abweichungen gegenüber den seit Newton, Maxwell und der speziellen Relativitätstheorie bekannten Gesetzen sind sehr gering. Vom empirischen Standpunkt aus ist es daher naheliegend, von der Tatsache der Inertialsysteme und der für sie gültigen Lorentz-Invarianz der Grundgleichungen auszugehen und die Gravitationseffekte in den hiermit gegebenen Rahmen einer fertigen Begriffssprache einzubauen. Dieses Verfahren wurde auch in dem Vorangehenden befolgt. Derselbe Standpunkt ist neuerdings in einer interessanten Arbeit, aber in ausgesprochen polemischer Haltung gegen die allgemeine Relativitätstheorie und besonders gegen das Machsche Prinzip von W. Thirring⁴¹) eingenommen worden. W. Thirring zeigt insbesondere, daß auf diesem Wege eine weitgehende Anpassung der Einsteinschen Gravitationstheorie — jedenfalls was die Effekte erster Ordnung betrifft — an den Formalismus der Feldtheorie für Elementarteilchen vollzogen werden kann, so daß die Gravitation keine wesentliche Sonderstellung gegenüber anderen Typen elementarer Wechselwirkungen einzunehmen scheint. Die allgemeine Auffassung W. Thirrings geht aber weiter

⁴⁰) Einstein äußert in dieser Hinsicht (Physik. Z., a. a. O., S. 1261): „Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei nochmals gesagt, daß ich ebensowenig wie Mach der Ansicht bin, es entspreche die Relativität der Trägheit einer logischen Notwendigkeit. Aber eine Theorie, in welcher die Relativität der Trägheit gewahrt ist, ist befriedigender als die uns heute geläufige Theorie, weil in letzterer das Inertialsystem eingeführt wird, dessen Bewegungszustand einerseits nicht durch die Zustände der beobachtbaren Gegenstände bedingt, also durch nichts der Wahrnehmung Zugängliches verursacht, andererseits aber für das Verhalten der materiellen Punkte bestimmend sein soll.“ (Bei Inertialsystemen der speziellen Relativitätstheorie wäre es natürlich — im Gegensatz zum de-Sitter-Kosmos — sinnlos, von „absoluter“ Geschwindigkeit zu sprechen).

⁴¹) W. Thirring, Lorentz-invariante Gravitationstheorie, Fortschritte der Physik, Bd. VII, Heft 2, S. 79, 1959.

dahin, daß das Machsche Prinzip nicht nur gänzlich überflüssig sei, sondern sogar im Widerspruch zu der Grundvorstellung der Quantenfeldphysik stehe⁴²⁾. Es ist demgegenüber zu betonen, daß der Begriff des „Vakuums“ auch in der Quantenfeldtheorie denjenigen der Inertialsysteme schon voraussetzt und daß es einen guten physikalischen Sinn hat, nach dem Ursprung der Inertialsysteme und der Lorentz-Gruppe zu fragen. Diese Frage braucht innerhalb der Quantenfeldtheorie freilich nicht gestellt zu werden (sie wird dort gewissermaßen „ausgeklammert“); sie grundsätzlich nicht zu stellen, heißt aber, dem kosmologischen Problem keine Bedeutung zuzuerkennen.

Der oben genannte, durch die Erfahrung nahegelegte Standpunkt wird aber unzureichend, sobald man größere Partien der Körperwelt ins Auge faßt. Beispielsweise ist die kosmische Rotverschiebung extragalaktischer Systeme ein mächtiger Effekt, der nur im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie (d. h. auf der Grundlage der nicht-linearen Feldgleichungen) *befriedigend* gedeutet werden kann⁴³⁾. Unter diesem Gesichtspunkt ist die eigentliche Domäne der allgemeinen Relativitätstheorie die Kosmologie. Ähnlich wie die spezielle Relativitätstheorie erst dann von der vorrelativistischen Physik erheblich abweichende Resultate liefert, wenn man zu „großen“, mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbaren Geschwindigkeiten übergeht, so wird die allgemeine Relativitätstheorie erst in Bereichen von „kosmischer“ Ausdehnung, deren Dimensionen nicht mehr klein sind gegen den mittleren Krümmungsradius der Welt, von ausschlaggebender Bedeutung. Mit der Frage nach der Beschaffenheit der Welt im Großen wird aber auch das Machsche Prinzip wieder in seine alten Rechte eingesetzt.

Vielleicht wirft die letztere Auffassung auch ein gewisses Licht auf die viel erörterte Frage nach dem Verhältnis von allgemeiner Relativitätstheorie und Quantentheorie. Wir haben in § 3 gezeigt, daß das Wirkungsquantum $\hbar$ gänzlich unabhängig vom Gravitationsfeld ist, d. h. auch von beliebig starken Gravitationsfeldern nicht beeinflusst wird. Dies deutet wohl darauf hin, daß der Gesetzesbereich der Relativitätstheorie und derjenige der Quantentheorie weit auseinander liegen; oder genauer gesagt: daß der Aspekt, unter dem die Körperwelt in der allgemeinen Relativitätstheorie erscheint, von demjenigen, unter dem sie in der Quantentheorie erscheint, grundsätzlich verschieden ist, derart, daß keine Hoffnung besteht, die Gesetze der Quantentheorie auf diejenigen der Relativitätstheorie zurückführen zu können (während das entgegengesetzte nicht völlig aussichtslos erscheint). Dieser Gegensatz kommt bekanntlich in dem tiefgreifenden Unterschied von „Makrophysik“ und „Mikrophysik“ oder von klassisch-deterministischer Kontinuumsphysik und statistisch-diskontinuierlichem Quantengeschehen zum Ausdruck. Es wäre demnach konsequent, den Gültigkeitsbereich der allgemeinen Relativitätstheorie grundsätzlich auf das makrophysikalische Verhalten der Körper einzu-

⁴²⁾ Es ist unseres Erachtens ein Irrtum anzunehmen, daß der Begriff der Beschleunigung im Rahmen der Feldtheorie einen „guten physikalischen Sinn“ habe, indem ein Teilchen „bei Beschleunigung beginnt, andere Teilchen zu erzeugen und nur bei gleichförmiger Bewegung den Anregungszustand anderer Felder nicht stört“. Es ist hierbei offenbar übersehen, daß ein reelles Teilchen aus Impulserhaltungsgründen doch nur dann andere reelle Teilchen erzeugen kann, wenn noch weitere reelle Teilchen im Feld vorhanden sind, mithin doch die Relativbewegung reeller Teilchen entscheidend ist (vgl. W. Thirring, a. a. O., S. 80).

⁴³⁾ Vgl. z. B. H. Bondi, *Cosmology*, Oxford University Press, 1960 (2. Aufl.).

schränken und darauf zu verzichten, die Raum-Zeit-Struktur der allgemeinen Relativitätstheorie bis in die Dimensionen der Elementarteilchen und Atome fortzusetzen. Diese Anschauung wird gerade durch das Machsche Prinzip nahegelegt: denn nach diesem können Raum und Zeit nur als denkbare Wechselbeziehungen zwischen Körpern und zwischen Ereignissen einen Sinn haben, nicht aber als absolute, physikalisch wirksame Realitäten aufgefaßt werden. Auch sind Maßstäbe und Uhren stets endlich ausgedehnte Meßkörper, deren Eigenschaften nicht ohne weiteres auf die Differentiale des metrischen Feldes übertragen werden können. Daher dürfte das Raum-Zeit-Kontinuum der Relativitätstheorie die physikalische Bedeutung einer Kontinuumsapproximation von Wechselwirkungen zwischen Körpern (Elementarteilchen) besitzen, welche von den Gesetzen der Quantentheorie beherrscht werden. Diese Approximation wird um so genauer sein, je mehr materielle Körper an ihrem Aufbau beteiligt sind. Das Raum-Zeit-Kontinuum wäre demnach nur der „Schauplatz“ (*res extensa*), auf dem sich das eigentliche Geschehen der Welt, das Quantengeschehen, abspielt. In diesem Sinne kommt dem Gravitationsfeld dann doch eine Sonderstellung hinsichtlich allen anderen Feldtypen (elektromagnetisches Feld, Mesonenfeld usw.) zu.

Ein (an sich wohlbekanntes) Beispiel möge dies noch näher erläutern. Eine große Zahl gravitationserzeugender kleiner Körper sei in einer Ebene gitterartig und miteinander fest verbunden angeordnet; auf das Gitter fallen andere Körperchen *verschiedener* Masse m aus einer bestimmten Richtung (etwa senkrecht zum Gitter) und mit gleichen Anfangsgeschwindigkeiten v ein; außerdem möge das Feld des Gitters von einem äußeren Gravitationsfeld überlagert sein. Solange nun der gegenseitige Abstand der Gitterpunkte sehr groß ist gegen die de Brogliesche Wellenlänge h/mv erfolgt die Bewegung der freien Massenpunkte nach dem Gesetz der Gravitation (Äquivalenzprinzip) und alle Körper bewegen sich unabhängig von ihrer Masse auf gleichen Bahnen. Wird aber die de Brogliesche Wellenlänge von der gleichen Größenordnung wie der Gitterabstand, so tritt Beugung ein und es erfolgt eine spektrale Zerlegung der einfallenden Massen nach ihren Impulsen, obwohl alle Wechselwirkungen Gravitationswirkungen sind. Im letzteren Falle befinden wir uns außerhalb des Gültigkeitsbereiches der klassischen Mechanik und Gravitationstheorie, und es gelten die Gesetze der Quantentheorie. Es werden also ersichtlich nur die Gesetze der Gravitationstheorie gelegentlich durchbrochen, nirgends jedoch die Gesetze der Quantentheorie. Der Quantentheorie kommt demnach ein Primat hinsichtlich der *klassischen* Theorie zu, deren vollkommenste Ausgestaltung die allgemeine Relativitätstheorie ist. Daher können die Gesetze des metrischen Feldes, welche von den elementaren Gesetzen der Quantentheorie prinzipiell unabhängig sind, keine absolute Gültigkeit besitzen. Die Gesetzmäßigkeit des metrischen Feldes wäre demnach — allerdings in statistischer Weise — an elementare Wechselwirkungen geknüpft, wie es im übrigen im Sinne des Machschen Prinzips gelegen ist.

Freiburg/Br., Institut für theoretische Physik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 2. Juni 1960.