Über die Singularitäten der Mellin-Transformierten.

Doetsch, G.

in: Mathematische Annalen - 128 | Periodical
6 page(s) (171 - 176)

DOETSCH, G.
Math. Annalen, Bd. 128, S. 171—176 (1954).

Über die Singularitäten der Mellin-Transformierten.

Von
GUSTAV DOETSCH in Freiburg i. B.

§ 1. Das Problem und die Lösungsmethode.

Wenn die Mellin-Transformation (abgekürzt $\mathfrak{M}$-Transformation)

$$\mathfrak{M}\{\Phi\} \equiv \int_0^\infty z^{s-1}\,\Phi(z)\,dz = \varphi(s) \tag{1}$$

in zwei Punkten mit verschiedener Abszisse und damit in einem Streifen $x_1 < \mathfrak{R}\, s < x_2$ konvergiert, so stellt sie dort eine analytische Funktion $\varphi(s)$ dar, die sich eventuell in die Halbebene $\mathfrak{R}\, s \leqq x_1$ bzw. $\mathfrak{R}\, s \geqq x_2$ fortsetzen läßt, dort aber im allgemeinen Singularitäten aufweist. Das Problem, das wir behandeln, lautet: *Gegeben seien zwei Mellin-Transformierte* $\varphi_1 = \mathfrak{M}\{\Phi_1\}$, $\varphi_2 = \mathfrak{M}\{\Phi_2\}$, *deren Singularitäten* (in einer der in Frage kommenden Halbebenen) *bekannt sind; was läßt sich über die Singularitäten von* $\mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\}$ *aussagen?* Die Lösung gibt u. a. ein Mittel an die Hand, um aus den verhältnismäßig wenigen bekannten[1]) $\mathfrak{M}$-Transformierten beliebig viele andere abzuleiten, die man zwar nicht explizit kennt, von denen man aber wenigstens die Singularitäten angeben kann.

Das Problem kann auch unter ausschließlicher Verwendung der Funktionen φ_1, φ_2 und ohne Bezugnahme auf die $\mathfrak{M}$-Transformation formuliert werden, denn in den Funktionsräumen, die wir später zugrunde legen werden, ist

$$\mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \varphi_1(\sigma)\,\varphi_2(s-\sigma)\,d\sigma. \tag{2}$$

Es handelt sich also darum, von den Singularitäten zweier Funktionen auf die Singularitäten ihrer „*komplexen Faltung*" zu schließen[2]).

Unsere Frage steht in Analogie zu der Aufgabe, aus den Singularitäten zweier Potenzreihen[3]) $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $f_2(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ die Singularitäten von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ abzuleiten, welche durch den HADAMARD*schen Kompositionssatz* gelöst wird. Während dieser dadurch bewiesen wird, daß in der zu (2) analogen Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i}\int f_1\!\left(\frac{1}{\zeta}\right) f_2(z\,\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (|\zeta| = \text{const.})$$

der Integrationsweg im Holomorphiebereich des Integranden verschoben wird

[1]) Während weit über 1000 Laplace-Transformierte explizit berechnet worden sind, dürfte die Zahl der bekannten $\mathfrak{M}$-Transformierten kaum 100 erreichen.

[2]) Die komplexe Faltung, die früher nur in rein theoretischen Zusammenhängen vorkam, tritt neuerdings auch in der physikalischen Literatur auf.

[3]) Genau genommen müßten Laurentreihen, verallgemeinert auf Dirichletsche Reihen, zur Analogie herangezogen werden.

(eine Methode, die auch auf (2) anwendbar wäre), gehen wir bei der $\mathfrak{M}$-Transformation einen anderen Weg, der dadurch, daß er gewisse tiefere Sätze über die $\mathfrak{M}$-Transformation benutzt, die Zusammenhänge durchsichtiger erscheinen läßt und außerdem die Hauptteile von $\varphi(s)$ unmittelbar liefert. (Umgekehrt könnte man diese Gedankengänge auch auf die Potenzreihen übertragen und so einen neuen Beweis für den HADAMARDschen Satz erhalten.)

Vorab ist zu bemerken: Um sowohl für die Originalfunktionen $\Phi(z)$ als auch für die Bildfunktionen $\varphi(s)$ Räume zu bekommen, die unabhängig von der $\mathfrak{M}$-Transformation durch innere funktionentheoretische Eigenschaften charakterisiert werden können und für die weiterhin neben der Formel (2) auch die „*komplexe Umkehrformel*"

$$(3) \qquad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} z^{-s} \varphi(s)\, ds$$

ohne Einschränkung gültig ist, legen wir folgende, schon von MELLIN benutzten Klassen zugrunde[4]) (es wird in der Folge immer

$$z = \varrho\, e^{i\vartheta}, \quad s = x + i\, y$$

gesetzt).

Klasse $\mathfrak{B}$: Die in einem Winkelraum $\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2$ (mit eventuellem Ausschluß des Nullpunktes) analytischen Funktionen $\Phi(z)$, die bei $z = 0$ und $z = \infty$ Potenzabschätzungen genügen:

$$|\Phi(z)| \leqq C\, \varrho^{-x_1} \text{ für } \varrho \leqq 1, \quad |\Phi(z)| \leqq C\, \varrho^{-x_2} \text{ für } \varrho > 1 \qquad (x_1 < x_2).$$

Klasse $\mathfrak{b}$: Die in einem Vertikalstreifen $x_1 \leqq x \leqq x_2$ analytischen Funktionen $\varphi(s)$, die bei $y = \pm\infty$ Exponentialabschätzungen genügen:

$$|\varphi(s)| \leqq C\, e^{-\vartheta_1 y} \text{ für } y < 0, \quad |\varphi(s)| \leqq C\, e^{-\vartheta_2 y} \text{ für } y \geqq 0 \quad (\vartheta_1 < \vartheta_2).$$

Jedem $\Phi \in \mathfrak{B}$ entspricht vermöge (1) ein $\varphi \in \mathfrak{b}$, aus dem man Φ durch (3) zurückerhält; jedem $\varphi \in \mathfrak{b}$ entspricht vermöge (3) ein $\Phi \in \mathfrak{B}$, aus dem φ durch (1) zurückgewonnen werden kann. Zwischen den Funktionen der beiden Klassen besteht also eine eineindeutige Zuordnung. Sind Φ_1 und Φ_2 zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{B}$ (mit denselben ϑ_1, ϑ_2), deren Konstante x_1, x_2 wir durch obere Indizes unterscheiden, so ist $\varphi(s) = \mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\}$ eine in dem Streifen $x_1^{(1)} + x_1^{(2)} < \Re\, s < x_2^{(1)} + x_2^{(2)}$ analytische Funktion der Klasse $\mathfrak{b}$, für welche gilt:

$$(4)\ \varphi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \varphi_1(\sigma)\, \varphi_2(s-\sigma)\, d\sigma \text{ mit } x_1^{(1)} < x < x_2^{(1)},\ x_1^{(2)} < \Re s - x < x_2^{(2)}.$$

Unsere *Beweismethode* ist nun die folgende: Wenn zwei Funktionen φ_1, φ_2 aus $\mathfrak{b}$ in je einer (linken) Halbebene Pole haben, so besitzen die entsprechenden Funktionen Φ_1, Φ_2 aus $\mathfrak{B}$ asymptotische Entwicklungen (für $z \to 0$), deren Koeffizienten und Exponenten sich aus den zu den Polen von φ_1, φ_2 gehörigen Hauptteilen ergeben (Hilfssatz 2 in § 2). Das Produkt $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ gehört auch

[4]) Für die im folgenden benutzten Bezeichnungen und Tatsachen siehe G. DOETSCH: Handbuch der Laplace-Transformation, I. Band, S. 408, 414. Basel: Verlag Birkhäuser 1950.

zu $\mathfrak{B}$ und hat die durch gliedweise Multiplikation der vorigen Entwicklungen resultierende Reihe zur asymptotischen Entwicklung (Hilfssatz 1). Wenn aber die Funktion $\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2 \in \mathfrak{B}$ eine asymptotische Entwicklung besitzt, so hat die entsprechende Funktion $\varphi = \mathfrak{M}\{\Phi\} = \mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\}$ Pole mit Hauptteilen, die sich aus den Koeffizienten und Exponenten der asymptotischen Entwicklung von Φ ergeben (Hilfssatz 3 = Umkehrung von Hilfssatz 2). Damit sind die Pole von φ und ihre Hauptteile letzten Endes aus denen von φ_1, φ_2 berechenbar.

Wenn es sich bei φ_1, φ_2 um rechte Halbebenen handelt, so treten bei Φ_1, Φ_2 asymptotische Entwicklungen für $z \to \infty$ auf.

In § 2 sind die benutzten Hilfssätze zusammengestellt, in § 3 wird der soeben skizzierte Beweis durchgeführt.

§ 2. Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Sind Φ_1 und Φ_2 für $z \to 0$ asymptotisch in Reihen der Form*

$$\Phi_1(z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} [a_\nu^{(0)} + a_\nu^{(1)}(-\log z) + \cdots + a_\nu^{(k_\nu)}(-\log z)^{k_\nu}]\, z^{\lambda_\nu} \quad (\Re\lambda_0 < \Re\lambda_1 < \cdots \to \infty)$$

$$\Phi_2(z) \approx \sum_{\mu=0}^{\infty} [b_\mu^{(0)} + b_\mu^{(1)}(-\log z) + \cdots + b_\mu^{(l_\mu)}(-\log z)^{l_\mu}]\, z^{\varkappa_\mu} \quad (\Re\varkappa_0 < \Re\varkappa_1 < \cdots \to \infty)$$

entwickelbar, so wird $\Phi(z) = \Phi_1(z) \cdot \Phi_2(z)$ asymptotisch durch die Reihe dargestellt, die durch gliedweise Multiplikation beider Reihen und Ordnen nach Potenzen von z entsteht.

Beweis: Man kann annehmen, daß die Folgen λ_ν und $\varkappa_\mu$ übereinstimmen, indem man sie zu einer Folge vereinigt und die in einer Reihe nicht vorkommenden Potenzen mit dem Koeffizienten 0 versieht. Ebenso kann man die zwei gleichen λ_ν, $\varkappa_\mu$ entsprechenden k_ν, l_μ als gleich voraussetzen. Schließlich dürfen alle $\Re\lambda_\nu$ und $\Re\varkappa_\mu$ als $\geqq 0$ angenommen werden, weil anderenfalls für die Funktionen $z^{-\lambda_0}\Phi_1(z)$ und $z^{-\varkappa_0}\Phi_2(z)$ diese Voraussetzungen erfüllt sind. — Die asymptotische Entwickelbarkeit von Φ_1 und Φ_2 bedeutet:

$$\Phi_1(z) = \sum_{\nu=0}^{n} [a_\nu^{(0)} + \cdots + a_\nu^{(k_\nu)}(-\log z)^{k_\nu}]\, z^{\lambda_\nu} + O(z^{\lambda_n + \varepsilon_n}),$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{\mu=0}^{n} [b_\mu^{(0)} + \cdots + b_\mu^{(k_\mu)}(-\log z)^{k_\mu}]\, z^{\lambda_\mu} + O(z^{\lambda_n + \varepsilon_n}),$$

wo die ε_n gewisse kleine positive Zahlen sind. Also ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Phi_1(z)\,\Phi_2(z) = &\sum_{\lambda_\nu + \lambda_\mu \leqq \lambda_n} [a_\nu^{(0)} b_\mu^{(0)} + \cdots + a_\nu^{(k_\nu)} b_\mu^{(k_\mu)}(-\log z)^{k_\nu + k_\mu}]\, z^{\lambda_\nu + \lambda_\mu}\\ &+ \sum_{\lambda_n < \lambda_\nu + \lambda_\mu \leqq 2\lambda_n} [a_\nu^{(0)} b_\mu^{(0)} + \cdots + a_\nu^{(k_\nu)} b_\mu^{(k_\mu)}(-\log z)^{k_\nu + k_\mu}]\, z^{\lambda_\nu + \lambda_\mu}\\ &+ \sum_{\nu=0}^{n} [a_\nu^{(0)} + \cdots + a_\nu^{(k_\nu)}(-\log z)^{k_\nu}]\, z^{\lambda_\nu} \cdot O(z^{\lambda_n + \varepsilon_n})\\ &+ \sum_{\mu=0}^{n} [b_\mu^{(0)} + \cdots + b_\mu^{(k_\mu)}(-\log z)^{k_\mu}]\, z^{\lambda_\mu} \cdot O(z^{\lambda_n + \varepsilon_n}) + O(z^{2\lambda_n + 2\varepsilon_n}).\end{aligned}$$

Wegen $\Re\,\lambda_\nu \geqq 0$ sind für $z \to 0$ die vier letzten Summanden gleich

$$O\,(z^{\lambda_n+\varepsilon'_n}) + O\,(z^{\lambda_n+\varepsilon''_n}) + O\,(z^{\lambda_n+\varepsilon''_n}) + O\,(z^{2\lambda_n+2\varepsilon_n}) = O\,(z^{\lambda_n+\varepsilon'''_n}),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Die Funktion $\varphi(s)$ sei in einer linken Halbebene $\Re s \leqq a$ analytisch bis auf die Pole $-\lambda_0, -\lambda_1, \ldots$ mit $a > -\Re\,\lambda_0 > -\Re\,\lambda_1 > \cdots \to -\infty$. Der Hauptteil der Laurententwicklung bei $-\lambda_\nu$ habe die Gestalt*

$$\frac{a_\nu^{(1)}}{s+\lambda_\nu} + \cdots + \frac{a_\nu^{(l_\nu)}}{(s+\lambda_\nu)^{l_\nu}}.$$

Nach Ausschluß der Pole durch kleine Kreise gelte in jedem Streifen $a_0 \leqq x \leqq a$ (a_0 beliebig $< a$) eine Abschätzung der Form

$$|\varphi\,(x+i\,y)| \leqq K\,(a_0)\,e^{-\vartheta_0|y|} \qquad (\vartheta_0 \text{ fest } > 0).$$

Dann ist $\varphi(s)$ in $-\Re\,\lambda_0 < \Re s \leqq a$ eine $\mathfrak{b}$-Funktion. Ihre zugehörige $\mathfrak{B}$-Funktion

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} z^{-s}\,\varphi(s)\,ds \qquad (-\Re\,\lambda_0 < x \leqq a)$$

ist in dem Winkelraum $|\vartheta| < \vartheta_0$ analytisch. In jedem kleineren Winkelraum $|\vartheta| \leqq \vartheta_0 - \delta$ genügt sie einer Abschätzung

$$|\Phi(z)| \leqq C\,(\delta)\,|z|^{-a} \qquad \text{für } |z| > 1,$$

während sie für $z \to 0$ in $|\vartheta| < \vartheta_0$ (gleichmäßig in $|\vartheta| \leqq \vartheta_0 - \delta$) die asymptotische Entwicklung besitzt:

$$\Phi(z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[a_\nu^{(1)} + \frac{a_\nu^{(2)}}{1!}(-\log z) + \cdots + \frac{a_\nu^{(l_\nu)}}{(l_\nu-1)!}(-\log z)^{l_\nu-1}\right] z^{\lambda_\nu}.$$

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Hilfssatz 3. *$\Phi(z)$ sei analytisch in dem Winkelraum $|\vartheta| \leqq \vartheta_0$ und habe dort gleichmäßig für $z \to 0$ die asymptotische Entwicklung*

$$\Phi(z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty}\,[b_\nu^{(0)} + b_\nu^{(1)}\,(-\log z) + \cdots + b_\nu^{(k_\nu)}(-\log z)^{k_\nu}]\,z^{\lambda_\nu}\,(\Re\,\lambda_0 < \Re\,\lambda_1 < \cdots \to \infty),$$

während gleichmäßig für $z \to \infty$ gilt:

$$\Phi(z) = O\,(z^\tau) \quad \textit{mit} \quad \tau < \Re\,\lambda_0.$$

Dann ist $\Phi(z)$ eine $\mathfrak{B}$-Funktion. Die zugehörige $\mathfrak{b}$-Funktion

$$\varphi(s) = \int\limits_0^\infty z^{s-1}\,\Phi(z)\,dz$$

ist in der Halbebene $\Re s < -\tau$ meromorph; die Pole sind die Punkte $-\lambda_\nu$, die entsprechenden Hauptteile lauten:

$$b_\nu^{(0)}\frac{1}{s+\lambda_\nu} + b_\nu^{(1)}\frac{1!}{(s+\lambda_\nu)^2} + \cdots + b_\nu^{(k_\nu)}\frac{k_\nu!}{(s+\lambda_\nu)^{k_\nu+1}}.$$

In jedem Streifen $-\tau_0 \leqq x \leqq -\tau - \delta$ genügt $\varphi(s)$ nach Ausschluß der darin liegenden Pole durch kleine Kreise einer Abschätzung der Form

$$|\varphi(s)| \leqq C\,(\tau_0, \delta)\,e^{-\vartheta_0|y|}.$$

Die Hilfssätze 2 und 3 wurden für den Spezialfall, daß die Exponenten λ_ν (d. h. die Pole $-\lambda_\nu$) eine äquidistante Folge auf einer Parallelen zur reellen

Achse bilden, von MELLIN[5]) bewiesen. Sie gelten aber auch in dem oben formulierten allgemeinen Fall[6]).

§ 3. Ein Satz über die Singularitäten von Mellin-Transformierten.

Das eigentliche Ziel dieser Arbeit ist der folgende

Satz. *Die ursprünglich in den Streifen* $x_1' < x < x_2'$ *bzw.* $x_1'' < x < x_2''$ *konvergenten* $\mathfrak{M}$*-Transformierten* $\varphi_1(s) = \mathfrak{M}\{\Phi_1\}$, $\varphi_2(s) = \mathfrak{M}\{\Phi_2\}$ *seien in den Halbebenen* $\Re s < x_2'$ *bzw.* $\Re s < x_2''$ *analytisch bis auf die Pole* $-\lambda_\nu'$ ($\Re\lambda_0' < \Re\lambda_1' < \cdots \to \infty$) *bzw.* $-\lambda_\mu''$ ($\Re\lambda_0'' < \Re\lambda_1'' < \cdots \to \infty$) *mit den Hauptteilen*

$$\frac{c_\nu^{(1)}}{s+\lambda_\nu'} + \cdots + \frac{c_\nu^{(l_\nu)}}{(s+\lambda_\nu')^{l_\nu}} \tag{5}$$

bzw.

$$\frac{d_\mu^{(1)}}{s+\lambda_\mu''} + \cdots + \frac{d_\mu^{(k_\mu)}}{(s+\lambda_\mu'')^{k_\mu}}\,. \tag{6}$$

In jedem Streifen $x_0' < x < x_2'$ *bzw.* $x_0'' < x < x_2''$ (x_0' *und* x_0'' *beliebig* $< x_2'$ *bzw.* x_2'') *gelte nach Ausschluß der Pole durch kleine Kreise die Abschätzung*

$$|\varphi_1(x+i\,y)| \leqq K'(x_0')\,e^{-\vartheta_0|y|} \quad \text{bzw.} \quad |\varphi_2(x+i\,y)| \leqq K''(x_0'')\,e^{-\vartheta_0|y|} \quad (\vartheta_0 > 0).$$

Dann ist die zunächst in dem Streifen $-\Re\lambda_0' - \Re\lambda_0'' < \Re s < x_2' + x_2''$ *konvergente* $\mathfrak{M}$*-Transformierte* $\varphi(s) = \mathfrak{M}\{\Phi_1\cdot\Phi_2\}$, *die dort auch durch*

$$\varphi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \varphi_1(\sigma)\,\varphi_2(s-\sigma)\,d\sigma \;(-\Re\lambda_0' < x < x_2',\, -\Re\lambda_0'' < \Re s - x < x_2'')$$

definiert werden kann, in der ganzen Halbebene $\Re s < x_2' + x_2''$ *analytisch mit Ausnahme (höchstens) der Pole* $-\lambda_\nu' - \lambda_\mu''$ *mit den Hauptteilen*

$$\sum_{\alpha=1}^{l_\nu}\sum_{\beta=1}^{k_\mu}\binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\frac{c_\nu^{(\alpha)}d_\mu^{(\beta)}}{(s+\lambda_\nu'+\lambda_\mu'')^{\alpha+\beta-1}}\,. \tag{7}$$

(Ergeben mehrere $-\lambda_\nu' - \lambda_\mu''$ *denselben Wert, so sind die entsprechenden Hauptteile zu vereinigen.)*

Bemerkungen: 1. Wenn der Hauptteil (7) identisch verschwindet, so ist $-\lambda_\nu' - \lambda_\mu''$ kein Pol, sondern eine Stelle der Holomorphie von $\varphi(s)$.

2. Hat eine der Funktionen φ_1, φ_2 in der betreffenden Halbebene keine Singularitäten, so gilt für $\varphi(s)$ dasselbe.

3. Sind speziell die Pole $-\lambda_\nu'$ und $-\lambda_\mu''$ einfach mit den Residuen c_ν bzw. d_μ, so sind auch die Pole von $\varphi(s)$ einfach mit den Residuen $c_\nu d_\mu$.

Beweis: Nach Hilfssatz 2 sind die Originalfunktionen Φ_1, Φ_2 der Bildfunktionen φ_1, φ_2 analytisch in $|\vartheta| < \vartheta_0$ und genügen in $|\vartheta| \leqq \vartheta_0 - \delta$ den Abschätzungen

$$|\Phi_1(z)| \leqq C'(\delta)\,|z|^{-x_1'} \quad \text{bzw.} \quad |\Phi_2(z)| \leqq C''(\delta)\,|z|^{-x_1''} \quad \text{für } |z| > 1,$$

[5]) HJ. MELLIN: Die Theorie der asymptotischen (sic) Reihen vom Standpunkte der Theorie der reziproken Funktionen und Integrale. Ann. Acad. Sci. Fenn. (A) 18 (1922), 108 S.; siehe die Wiedergabe in G. DOETSCH: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, S. 256—262. Berlin: Julius Springer 1937.

[6]) Vollständig ausgeführte Beweise siehe in dem demnächst erscheinenden II. Band des unter 4) zitierten Handbuchs, Kap. 6 § 3 und Kap. 5 § 2.

während sie für $z \to 0$ gleichmäßig in $|\vartheta| \leqq \vartheta_0 - \delta$ asymptotisch so entwickelbar sind:

$$(8) \qquad \Phi_1(z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[c_\nu^{(1)} + \frac{c_\nu^{(2)}}{1!}(-\log z) + \cdots + \frac{c_\nu^{(l_\nu)}}{(l_\nu - 1)!}(-\log z)^{l_\nu - 1} \right] z^{\lambda'_\nu}$$

bzw.

$$(9) \qquad \Phi_2(z) \approx \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[d_\mu^{(1)} + \frac{d_\mu^{(2)}}{1!}(-\log z) + \cdots + \frac{d_\mu^{(k_\mu)}}{(k_\mu - 1)!}(-\log z)^{k_\mu - 1} \right] z^{\lambda''_\mu}.$$

Folglich ist $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ eine $\mathfrak{B}$-Funktion, die in $|\vartheta| \leqq \vartheta_0 - \delta$ der Abschätzung

$$|\Phi_1(z)\, \Phi_2(z)| \leqq C(\delta)\, |z|^{-(x'_2 + x''_2)} \qquad \text{für } |z| > 1$$

genügt und nach dem Hilfssatz 1 eine asymptotische Entwicklung besitzt, die durch gliedweise Multiplikation der Entwicklungen für Φ_1 und Φ_2 entsteht. Ihre entsprechende $\mathfrak{M}$-Transformierte $\varphi(s)$ ist eine $\mathfrak{b}$-Funktion, die für $-\Re\,\lambda'_0 - \Re\,\lambda''_0 < \Re\, s < x'_2 + x''_2$ durch (1) gegeben ist, die sich aber nach Hilfssatz 3 in die Halbebene $\Re\, s < x'_2 + x''_2$ fortsetzen läßt bis auf die Pole $-\lambda'_\nu - \lambda''_\mu$, wobei in dem zugehörigen Hauptteil jedem durch Multiplikation von (8) und (9) entstandenen Glied der Form

$$\frac{c_\nu^{(\alpha)}}{(\alpha-1)!}\,\frac{d_\mu^{(\beta)}}{(\beta-1)!}(-\log z)^{\alpha+\beta-2}\, z^{\lambda'_\nu + \lambda''_\mu}$$

ein Partialbruch

$$\frac{c_\nu^{(\alpha)}\, d_\mu^{(\beta)}}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}\;\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(s+\lambda'_\nu+\lambda''_\mu)^{\alpha+\beta-1}} = \binom{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\frac{c_\nu^{(\alpha)}\, d_\mu^{(\beta)}}{(s+\lambda'_\nu+\lambda''_\mu)^{\alpha+\beta-1}}$$

entspricht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beispiel: $\mathfrak{M}\left\{\frac{1}{1-z}\right\} = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ konvergiert in $0 < \Re\, s < 1$, ist aber in $\Re\, s < 1$ meromorph mit den Polen $-\lambda_\nu = -\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ und den Residuen $(-1)^\nu$. $\mathfrak{M}\{e^{-z}\} = \Gamma(s)$ konvergiert in $0 < \Re s < \infty$, ist aber in $\Re s < \infty$ meromorph mit den Polen $-\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ und den Residuen $\frac{(-1)^\mu}{\mu!}$. Die Funktionen $\frac{\pi}{\sin \pi s}$ und $\Gamma(s)$ genügen in jedem Vertikalstreifen Abschätzungen der Form $O(e^{-\pi|y|})$. Also ist die transzendente Funktion

$$\int_0^\infty z^{s-1}\frac{e^{-z}}{1+z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{\pi\,\Gamma(\sigma)}{\sin \pi(s-\sigma)}\,d\sigma \quad (0 < x,\ 0 < \Re s - x < 1)$$

in der ganzen Ebene analytisch bis auf die Pole $-\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots)$. Da jeder Pol $-\varkappa$ außer $\varkappa = 0$ auf mehrfache Weise in der Form $-\nu-\mu$ zustande kommt, erhält man für die Residuen in $0, -1, -2, \ldots$ die Werte

$$1,\ 1\left(-\frac{1}{1!}\right) + (-1)\,1 = -2,\ 1\,\frac{1}{2!} + (-1)\left(-\frac{1}{1!}\right) + 1\cdot 1 = \frac{5}{2},$$

$$1\left(-\frac{1}{3!}\right) + (-1)\frac{1}{2!} + 1\left(-\frac{1}{1!}\right) + (-1)\,1 = -\frac{8}{3}, \ldots$$

Natürlich gilt ein entsprechender Satz für den Fall, daß die Funktionen φ_1, φ_2 in rechten Halbebenen meromorph sind.

(Eingegangen am 17. März 1954.)