Die Funktionalgleichung der Zetafunktion und der Dirichletschen Reihen mit periodischen Koeffiziente...

Schnee, W.

in: Mathematische Zeitschrift - 31 | Periodical
13 page(s) (378 - 390)

Die Funktionalgleichung der Zetafunktion und der Dirichletschen Reihen mit periodischen Koeffizienten.

Von

Walter Schnee in Leipzig.

Das schönste Resultat über die Zetafunktion, das schon Riemann beweisen konnte, ist die nach ihm benannte Funktionalgleichung. Aber die beiden Beweise, die Herr Landau[1]) in seinem „Handbuch" darstellt, sind immer noch sehr lang und kompliziert, weil sie beide auf Kunstgriffen beruhen, deren Zweck sich erst nach langen Untersuchungen durch den Erfolg aufklärt. Der in dem neuen dreibändigen Lehrbuch von Herrn Landau[2]) enthaltene Beweis ist sachlich von dem ersten dieser Beweise nicht verschieden. Nun hat im vorigen Jahr Herr Mordell[3]) einen neuen Beweis veröffentlicht, der aber schließlich sogar noch in der Umgestaltung von Herrn Rademacher[4]) trotz knapper Darstellung reichlich kompliziert ist. Diese beiden Arbeiten veranlassen mich aber, einen Beweis der Funktionalgleichung mitzuteilen, den ich mir schon vor Jahren für Vorlesungszwecke zurechtgelegt habe und der auch die Grundlage der Leipziger Dissertation von Herrn Willi Langer[5]) bildete. Dieser Beweis scheint mir zugleich durchsichtig und völlig elementar zu sein, und ich stelle ihn daher absichtlich in derjenigen Breite dar, in der er für einen Leser, der nur die Grundlagen der Analysis und nichts aus der Theorie der Zetafunktion kennt, am leichtesten verständlich ist. Im Anschluß daran beweise ich u. a. eine Funktionalgleichung, der jede Dirichletsche Reihe mit periodischen Koeffizienten

---

1) „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen", Teubner 1909, 1, S. 270—299.

2) „Vorlesungen über Zahlentheorie", Hirzel 1927, 2, S. 63—69.

3) Cambridge Phil. Soc. Proc. **24** (1928), Part 4, S. 585–596.

4) Math. Zeitschrift **31** (1929), S. 39–44.

5) „Einige Anwendungen der Eulerschen Summenformel", Jahrbuch der Phil. Fak. Leipzig 1921, 2, S. 165–170 (Auszug).

genügt; diese ist ganz überraschend einfach und scheint mir, wenn man sie auf die in der Zahlentheorie eine so große Rolle spielenden Charakterreihen (L-Reihen) anwendet, die Quelle zu sein, von der aus ihre Funktionalgleichungen erst recht verständlich werden.

§ 1.

Ich gebrauche aus den allgemein bekannten Grundlagen der Analysis die Funktionalgleichung der Gammafunktion

$$\Gamma(s) = (s-1)\,\Gamma(s-1) \tag{1}$$

und die beiden Integraldarstellungen

$$\frac{\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}}{a^s} = \int_0^\infty x^{s-1}\cos ax\,dx, \qquad \frac{\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}}{a^s} = \int_0^\infty x^{s-1}\sin ax\,dx, \tag{2}$$

die bei positivem a beide in dem Streifen $0 < \sigma < 1$ konvergieren, wo wie üblich $s = \sigma + ti$ gesetzt ist; daß die zweite Gleichung sogar im Streifen $-1 < \sigma < 1$ konvergiert, wird im folgenden nicht benutzt. Ferner gebrauche ich die folgende wohl bekannte Gleichung aus der Theorie der Fourierschen Reihen

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right), \tag{3}$$

die für $-\pi < x < \pi$ gilt und wo die Reihe rechts bei beliebig kleinem positiven ε im Intervall $-\pi + \varepsilon \leqq x \leqq \pi - \varepsilon$ sogar gleichmäßig konvergiert. Durch die Substitution $x = 2\pi(\vartheta - \frac{1}{2})$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{1}{2} - \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n\vartheta}{\pi n}$$

für $0 < \vartheta < 1$, und es ist daher, wenn bei reellem x der Ausdruck $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ bedeutet und $\vartheta = x - [x]$ gesetzt wird, für jedes nicht ganzzahlige x

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}; \tag{4}$$

diese Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem Intervall $m + \varepsilon \leqq x \leqq m + 1 - \varepsilon$, wo m eine beliebige ganze Zahl und ε eine beliebig kleine positive Zahl ist.

Für die Zetafunktion, die in der Halbebene $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert ist, gebrauchen wir nur die wohl bekannte Umformung

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\vartheta\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}},$$

die sich ergibt, wenn man das ϑ-Integral durch partielle Integration ausrechnet; die Reihe rechts aber konvergiert sogar in der Halbebene $\sigma > 0$, wie man sofort aus der Abschätzung

$$\left|\int_0^1 \frac{\vartheta\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}}\right| \leqq \frac{1}{n^{\sigma+1}}\int_0^1 \vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\sigma+1}}$$

erkennt. Hieraus ergibt sich weiter für die Halbebene $\sigma > 0$

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}}; \tag{5}$$

da aber die partielle Integration die Formel

$$\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}} = \frac{s+1}{2}\int_0^1 \frac{(\vartheta-\vartheta^2)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+2}} \tag{6}$$

und damit die Abschätzung

$$\left|\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}}\right| \leqq \frac{|s+1|}{2}\cdot\frac{1}{n^{\sigma+2}}\int_0^1 (\vartheta-\vartheta^2)\, d\vartheta = \frac{|s+1|}{12}\cdot\frac{1}{n^{\sigma+2}}$$

liefert, so konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von (5) sogar in der Halbebene $\sigma > -1$. Da weiter in der Halbebene $\sigma < 0$ die Formel

$$s\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{\vartheta^{s+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1}$$

gilt, so erhält man aus (5) für den Streifen $-1 < \sigma < 0$ die Darstellung

$$\zeta(s) = s\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}} = s\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\, dx, \tag{7}$$

wo $\varphi(x)$ die in der Gleichung (4) auftretende Funktion von x ist, die an den ganzzahligen Werten von x Sprungstellen besitzt.

Ersetzt man s durch $1-s$, so erhält man für den Streifen $1 < \sigma < 2$ die Darstellung

$$\zeta(1-s) = (1-s)\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{2-s}}\, dx,$$

also unter Benutzung von (4)

$$\zeta(1-s) = (1-s)\int_0^\infty \frac{dx}{x^{2-s}} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}. \tag{8}$$

Wenn es nun gestattet ist, in dieser Formel für $1 < \sigma < 2$ die Reihenfolge der unendlichen Summation und der unendlichen Integration zu vertauschen, so ergibt sich hieraus unter Benutzung der zweiten Formel (2), in der nur s durch $s-1$ zu ersetzen ist und schließlich unter Benutzung der Funktionalgleichung (1) der Gammafunktion:

$$\begin{aligned} \zeta(1-s) &= (1-s)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n}\int_0^\infty x^{s-2}\sin 2\pi n x\, dx \\ &= (1-s)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{\Gamma(s-1)\sin(s-1)\frac{\pi}{2}}{(2\pi n)^{s-1}} \\ &= \frac{\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}}{\pi\cdot(2\pi)^{s-1}}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\zeta(s). \end{aligned} \tag{9}$$

Damit ist die Riemannsche Funktionalgleichung zunächst im Streifen $1 < \sigma < 2$ bewiesen; berücksichtigt man aber, daß wir die Zetafunktion bereits sukzessive aus der Halbebene $\sigma > 1$ in $\sigma > 0$ und schließlich $\sigma > -1$ fortgesetzt haben, so liefert die Funktionalgleichung infolge des Prinzips der Permanenz der analytischen Beziehungen, auf dem ja die analytische Fortsetzung überhaupt beruht, die Fortsetzung der Zetafunktion über die ganze s-Ebene hin, und die Funktionalgleichung gilt also für jeden Wert von s.

Es bleibt also nur übrig, nachzuweisen, daß die Vertauschung der beiden unendlichen Prozesse gerechtfertigt ist. Dazu gehen wir aus von der Gleichung

$$\int_{m+\frac{1}{N}}^{m+1-\frac{1}{N}} \frac{dx}{x^{2-s}}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2\pi nx}{\pi n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n}\int_{m+\frac{1}{N}}^{m+1-\frac{1}{N}} x^{s-2}\sin 2\pi n x\, dx, \tag{10}$$

in der m eine ganze Zahl $\geqq 0$ und N eine ganze Zahl $\geqq 2$ bedeutet, während s bei den folgenden Betrachtungen immer einen festen Punkt im Streifen $1 < \sigma < 2$ darstellt. Diese Gleichung ist gerechtfertigt, da ja die unendliche Reihe in dem endlichen Integrationsintervall gleichmäßig konvergiert. Es ist also nur nachzuweisen, daß bei festem ganzzahligen $m \geqq 0$ die Beziehungen

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
&\lim_{N=\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\int\limits_{m}^{m+\frac{1}{N}} x^{s-2}\sin 2\pi n x\,dx = 0,\\
&\lim_{N=\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\int\limits_{m+1-\frac{1}{N}}^{m+1} x^{s-2}\sin 2\pi n x\,dx = 0
\end{aligned}
$$

gelten. Dann folgt aus (10) durch den Grenzübergang $N=\infty$

$$\int\limits_{m}^{m+1}\frac{dx}{x^{2-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\cdot\int\limits_{m}^{m+1} x^{s-2}\sin 2\pi n x\,dx.$$

Es ist daher für jede positive ganze Zahl X, wie man durch Addition dieser Gleichungen für $m=0,1,\ldots,X-1$ erkennt:

$$(12)\qquad \int\limits_{0}^{X}\frac{dx}{x^{2-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\cdot\int\limits_{0}^{X} x^{s-2}\sin 2\pi n x\,dx,$$

und es ist jetzt nur noch nachzuweisen, daß

$$(13)\qquad \lim_{X=\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\int\limits_{X}^{\infty} x^{s-2}\sin 2\pi n x\,dx = 0$$

ist. Dann folgt aus (12) durch den Grenzübergang $X=\infty$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^{2-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\cdot\int\limits_{0}^{\infty} x^{s-2}\sin 2\pi n x\,dx,$$

was zu beweisen war. Es fehlt also nur der Nachweis von (11) und (13) für $1<\sigma<2$.

Es sei $Y\geqq 1$ und N die kleinste ganze Zahl $\geqq Y$. Dann erhält man:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{N}^{\infty}\frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\,dy &= \sum_{n=N}^{\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{\sin 2\pi\vartheta\,d\vartheta}{(n+\vartheta)^{2-s}}=\sum_{n=N}^{\infty}\int\limits_{0}^{\frac12}\sin 2\pi\vartheta\,d\vartheta\left(\frac{1}{(n+\vartheta)^{2-s}}-\frac{1}{(n+\frac12+\vartheta)^{2-s}}\right)\\
&=(2-s)\sum_{n=N}^{\infty}\int\limits_{0}^{\frac12}\sin 2\pi\vartheta\,d\vartheta\int\limits_{n+\vartheta}^{n+\frac12+\vartheta}\frac{dy}{y^{3-s}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int\limits_{N}^{\infty}\frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\,dy\right| &< \frac{|2-s|}{2}\sum_{n=N}^{\infty}\int\limits_{0}^{\frac12}\frac{d\vartheta}{(n+\vartheta)^{3-\sigma}}<\frac{|2-s|}{2}\int\limits_{N}^{\infty}\frac{dy}{y^{3-\sigma}}\\
&=\frac12\cdot\frac{|2-s|}{2-\sigma}\cdot\frac{1}{N^{2-\sigma}}\leqq\frac12\cdot\frac{|2-s|}{2-\sigma}\cdot\frac{1}{Y^{2-\sigma}},
\end{aligned}
$$

und außerdem

$$\left|\int_Y^N \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\,dy\right| < \frac{1}{Y^{2-\sigma}}.$$

Folglich ist für jedes $Y \geqq 1$

$$\left|\int_Y^\infty \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\,dy\right| < \frac{3}{2}\cdot\frac{|2-s|}{2-\sigma}\cdot\frac{1}{Y^{2-\sigma}} \leqq \frac{3}{2}\cdot\frac{|2-s|}{2-\sigma}. \tag{14}$$

Hieraus folgt für jedes $n \geqq 1$ und $X \geqq 1$

$$\left|\int_X^\infty \frac{\sin 2\pi n x}{x^{2-s}}\,dx\right| = \left|\frac{1}{n^{s-1}}\int_{nX}^\infty \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\,dy\right| < \frac{1}{n^{\sigma-1}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{|2-s|}{2-\sigma}\cdot\frac{1}{(nX)^{2-\sigma}}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{|2-s|}{2-\sigma}\cdot\frac{1}{n\cdot X^{2-\sigma}};$$

also ist für $X \geqq 1$

$$\left|\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n}\int_X^\infty \frac{\sin 2\pi n x}{x^{2-s}}\,dx\right| < \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{|2-s|}{2-\sigma}\cdot\frac{1}{X^{2-\sigma}}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{|2-s|}{2-\sigma}\cdot\frac{1}{X^{2-\sigma}},$$

und hieraus folgt (13) für $\sigma < 2$.

Ferner ist für $0 \leqq y_0 < y_1 \leqq 1$ wegen $\sigma > 1$

$$\left|\int_{y_0}^{y_1} \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\,dy\right| \leqq 2\pi\cdot\int_{y_0}^{y_1}\frac{dy}{y^{1-\sigma}} \leqq 2\pi\int_0^1 \frac{dy}{y^{1-\sigma}} = \frac{2\pi}{\sigma} < 2\pi;$$

kombiniert man dieses Resultat mit (14), so erhält man für $0 \leqq y_0 < y_1$ bei beliebigem y_0 und y_1

$$\left|\int_{y_0}^{y_1} \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\,dy\right| < (2\pi + 3)\frac{|2-s|}{2-\sigma},$$

und daher für $n \geqq 1$, $0 \leqq x_0 < x_1$

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin 2\pi n x}{x^{2-s}}\,dx\right| = \left|\frac{1}{n^{s-1}}\int_{nx_0}^{nx_1} \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\,dy\right| < \frac{2\pi+3}{n^{\sigma-1}}\cdot\frac{|2-s|}{2-\sigma}. \tag{15}$$

Ferner ist für ganzzahlige Werte von $m \geqq 0$, $n \geqq 1$ sowie für $N \geqq 2$

$$\left|\int_m^{m+\frac{1}{N}} \frac{\sin 2\pi n x}{x^{2-s}}\,dx\right| = \left|\int_0^{\frac{1}{N}} \frac{\sin 2\pi n\vartheta\,d\vartheta}{(m+\vartheta)^{2-s}}\right| < \int_0^{\frac{1}{N}}\frac{d\vartheta}{\vartheta^{2-\sigma}} = \frac{1}{\sigma-1}\cdot\frac{1}{N^{\sigma-1}}. \tag{16}$$

Also ergibt sich bei ganzzahligem $N \geqq 2$ und ganzzahligem $m \geqq 0$ aus (16) und (15)

$$(17)\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\int\limits_{m}^{m+\frac{1}{N}}\frac{\sin 2\pi n x}{x^{2-s}}\,dx\right| < \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{\sigma-1}\cdot\frac{1}{N^{\sigma-1}} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{2\pi+3}{n^{\sigma-1}}\cdot\frac{|2-s|}{2-\sigma}$$

$$< \frac{\log N + 1 + (2\pi+3)\dfrac{|2-s|}{2-\sigma}}{\pi(\sigma-1)N^{\sigma-1}},$$

woraus die erste der beiden Formeln (11) für $1 < \sigma < 2$ folgt und sogar gleichmäßig für die ganzen Zahlen $m \geqq 0$. Ebenso erhält man analog zu (16)

$$\left|\int\limits_{m+1-\frac{1}{N}}^{m+1}\frac{\sin 2\pi n x}{x^{2-s}}\,dx\right| = \left|-\int\limits_{0}^{\frac{1}{N}}\frac{\sin 2\pi n\vartheta}{(m+1-\vartheta)^{2-s}}\,d\vartheta\right| < \frac{1}{\sigma-1}\cdot\frac{1}{N^{\sigma-1}},$$

und daher analog zu (17)

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\int\limits_{m+1-\frac{1}{N}}^{m+1}\frac{\sin 2\pi n x}{x^{2-s}}\,dx\right| < \frac{\log N + 1 + (2\pi+3)\dfrac{|2-s|}{2-\sigma}}{\pi(\sigma-1)N^{\sigma-1}},$$

so daß auch die zweite der Formeln (11) gleichmäßig für die ganzen Zahlen $m \geqq 0$ gilt.

§ 2.

Der Grundgedanke dieses Beweises der Riemannschen Funktionalgleichung ist sehr durchsichtig, weil er ja nur in dem formalen Übergang von (8) zu (9) besteht. Aber es ist mühsam, die Vertauschbarkeit der beiden unendlichen Prozesse nachzuweisen. Deshalb möchte ich noch die folgende Beweisanordnung auseinandersetzen, welche diese Schwierigkeit fast ganz umgeht und zugleich neue Einblicke über die sukzessive Fortsetzung der Zetafunktion in die Halbebenen $\sigma > 0$, $\sigma > -1$, $\sigma > -2$ usw. gewährt, die so auf der Hand liegen, daß ich sie unter Beschränkung auf das Ziel der Untersuchung nicht näher auszuführen brauche. Aus (5) und (6) ergibt sich die Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{s(s+1)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{(\vartheta-\vartheta^2)\,d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+2}},$$

die in der Halbebene $\sigma > -1$ konvergiert. Hieraus folgt, zunächst wieder für $\sigma > -1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{s}{12} - \frac{s(s+1)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(\vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6})\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+2}}. \tag{18}$$

Nun aber liefert die partielle Integration

$$\int_0^1 \frac{(\vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6})\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+2}} = \frac{s+2}{6} \int_0^1 \frac{(2\vartheta^3 - 3\vartheta^2 + \vartheta)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+3}},$$

so daß die Darstellung (18) sogar in der Halbebene $\sigma > -2$ konvergiert. Ferner ist für $\sigma < -1$

$$-\frac{s(s+1)}{2} \int_0^1 \frac{(\vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6})\, d\vartheta}{\vartheta^{s+2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{s}{12},$$

so daß man aus (18) im Streifen $-2 < \sigma < -1$ die Darstellung

$$\zeta(s) = -\frac{s(s+1)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(\vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6})\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+2}} \tag{19}$$

erhält.

An Stelle der Reihenentwicklung (3) müssen wir jetzt die Gleichung

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right)$$

heranziehen, die im Intervall $-\pi \leqq x \leqq \pi$ bei absoluter und gleichmäßiger Konvergenz gilt. Durch die Substitution $x = 2\pi(\vartheta - \frac{1}{2})$ ergibt sich für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$

$$\vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n \vartheta}{(\pi n)^2},$$

und hieraus für jeden reellen Wert von x

$$\psi(x) = \vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(\pi n)^2}, \tag{20}$$

wo wieder $\vartheta = x - [x]$ ist und die Reihe rechts absolut und gleichmäßig für alle x konvergiert. Also ergibt sich aus (19) die im Streifen $-2 < \sigma < -1$ geltende Darstellung

$$\zeta(s) = -\frac{s(s+1)}{2} \int_0^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+2}}\, dx.$$

Man erhält daher für $2 < \sigma < 3$:

$$\zeta(1-s) = -\frac{(1-s)(2-s)}{2}\int_0^\infty \psi(x)\, x^{s-3}\, dx$$

$$= -\frac{(s-1)(s-2)}{2}\int_0^\infty x^{s-3}\, dx \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2\pi n x}{(\pi n)^2}.$$

Die Vertauschung der beiden unendlichen Prozesse ergibt also wieder wegen der ersten Formel (2) und wegen (1) für $2 < \sigma < 3$:

$$\zeta(1-s) = -\frac{(s-1)(s-2)}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\pi n)^2}\int_0^\infty x^{s-3}\cos 2\pi n x\, dx$$

$$= -\frac{(s-1)(s-2)}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\pi n)^2}\cdot\frac{\Gamma(s-2)\cos(s-2)\frac{\pi}{2}}{(2\pi n)^{s-2}}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\zeta(s).$$

Die Vertauschbarkeit ist aber jetzt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (20) für alle x viel leichter zu beweisen, da die zu (12) analoge Gleichung jetzt trivial ist und nur noch die zu (13) analoge Gleichung ganz ebenso wie im vorigen Paragraphen zu beweisen ist.

§ 3.

Wir wollen jetzt die Untersuchungen von § 1 auf die für $\sigma > 1$ konvergente Reihe

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+w)^s}$$

übertragen. Dabei setzen wir w als reell voraus und nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $0 < w \leqq 1$ an, so daß

$$\zeta(s, 1) = \zeta(s)$$

ist. Wir erhalten für $\sigma > 0$ die bekannte Entwicklung

$$\zeta(s, w) = \frac{1}{w^s} + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{w^{s-1}} - s\sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \frac{\vartheta\, d\vartheta}{(n+w+\vartheta)^{s+1}},$$

woraus sich analog zu (5) die für $\sigma > -1$ geltende Entwicklung

$$\zeta(s, w) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{w^s} + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{w^{s-1}} + s\sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{(n+w+\vartheta)^{s+1}} \tag{21}$$

ergibt. Hieraus aber folgt im Streifen $-1 < \sigma < 0$ wegen $0 < w \leqq 1$:

$$\zeta(s, w) = \frac{1}{w^s} + s\int\limits_{-w}^{0} \frac{(\frac{1}{2} - \vartheta)\, d\vartheta}{(w + \vartheta)^{s+1}} + s\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{0}^{1} \frac{(\frac{1}{2} - \vartheta)\, d\vartheta}{(n + w + \vartheta)^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{w^s} + s\int\limits_{0}^{w} \frac{\frac{1}{2} + w - x}{x^{s+1}}\, dx + s\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x)\, dx}{(x + w)^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{w^s} + s\int\limits_{0}^{w} \frac{\varphi(x - w) + 1}{x^{s+1}}\, dx + s\int\limits_{w}^{\infty} \frac{\varphi(x - w)\, dx}{x^{s+1}}$$

$$= s\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x - w)\, dx}{x^{s+1}}.$$

Das ist die zu (7) analoge Gleichung.

Also ergibt sich für $1 < \sigma < 2$:

$$\zeta(1 - s, w) = (1 - s)\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x - w)}{x^{2-s}}\, dx = (1 - s)\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{2-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n (x - w)}{\pi n}.$$

Nunmehr beweist man genau wie in § 1, daß die Vertauschung der beiden unendlichen Prozesse gerechtfertigt ist, und erhält wie dort für $1 < \sigma < 2$:

$$\zeta(1 - s, w) = (1 - s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n w}{\pi n} \int\limits_{0}^{\infty} x^{s-2} \sin 2\pi n x\, dx$$

$$- (1 - s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n w}{\pi n} \int\limits_{0}^{\infty} x^{s-2} \cos 2\pi n x\, dx$$

$$= (1 - s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n w}{\pi n} \cdot \frac{\Gamma(s - 1) \sin (s - 1)\frac{\pi}{2}}{(2\pi n)^{s-1}}$$

$$- (1 - s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n w}{\pi n} \cdot \frac{\Gamma(s - 1) \cos (s - 1)\frac{\pi}{2}}{(2\pi n)^{s-1}}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\left\{\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n w}{n^s} + \sin\frac{s\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n w}{n^s}\right\}.$$

Dieses Resultat gilt natürlich in der Halbebene $\sigma > 1$; die Funktion $\zeta(s, w)$ ist also in der ganzen s-Ebene regulär bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum 1, den man natürlich schon aus (21) findet.

Es sei nun w rational, also $w = \frac{l}{k}$, wo l und k positive ganze Zahlen sind und $l \leqq k$ ist. Dann ist für $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n w}{n^s} = \sum_{r=1}^{k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi l}{k}(k\nu + r)}{(k\nu + r)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{r=1}^{k} \cos \frac{2\pi r l}{k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\nu + \frac{r}{k}\right)^s}$$

$$= \frac{1}{k^s} \sum_{r=1}^{k} \cos \frac{2\pi r l}{k} \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right),$$

und ebenso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n w}{n^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{r=1}^{k} \sin \frac{2\pi r l}{k} \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right).$$

Also geht die gefundene Gleichung für $w = \frac{l}{k}$ in die folgende über:

$$(22) \qquad \zeta(1 - s, w)$$

$$= \frac{2}{(2\pi k)^s} \Gamma(s) \sum_{r=1}^{k} \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right) \left(\cos 2\pi r w \cdot \cos \frac{s\pi}{2} + \sin 2\pi r w \cdot \sin \frac{s\pi}{2}\right\},$$

die natürlich nach dem vorangegangenen Resultat in der ganzen s-Ebene gilt.

§ 4.

Wir wollen nunmehr den folgenden Satz über Dirichletsche Reihen mit periodischen Koeffizienten beweisen:

Es sei für eine positive ganze Zahl k bei beliebigem ganzzahligen n die Gleichung

$$\chi(n + k) = \chi(n)$$

erfüllt, so daß die Koeffizienten der für $\sigma > 1$ absolut konvergenten Dirichletschen Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

die Periode k haben. Dann ist die Funktion $L(s)$ in der ganzen s-Ebene regulär bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k} \chi(r)$, wenn dieser Ausdruck $\neq 0$ ist; sonst ist natürlich $L(s)$ eine ganze Funktion. Setzt man ferner:

$$(23) \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{r=1}^{k} \chi(r) \cos \frac{2\pi r n}{k} = \chi_1(n), \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{r=1}^{k} \chi(r) \sin \frac{2\pi r n}{k} = \chi_2(n),$$

sowie

$$L_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_1(n)}{n^s},\qquad L_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_2(n)}{n^s},$$

so daß auch die Koeffizienten dieser beiden Reihen die Periode k haben, so gilt in der ganzen s-Ebene die Funktionalgleichung

$$(24)\qquad L(1-s)=\frac{2}{(2\pi)^s}\cdot k^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\cdot L_1(s)+\sin\frac{s\pi}{2}\cdot L_2(s)\Big).$$

Beweis. Aus der Periodizität der Koeffizienten ergibt sich für $\sigma>1$

$$(25)\qquad L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\sum_{r=1}^{k}\chi(r)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(k\nu+r)^s}=\frac{1}{k^s}\sum_{r=1}^{k}\chi(r)\,\zeta\Big(s,\frac{r}{k}\Big);$$

hieraus aber folgt schon wegen unserer Resultate über $\zeta(s,w)$ die Fortsetzbarkeit der Funktion $L(s)$ über die ganze s-Ebene und ihr Verhalten an der Stelle $s=1$. Weiter ergibt sich aus (25), (22) und (23)

$$\begin{aligned}L(1-s)&=k^{s-1}\sum_{l=1}^{k}\chi(l)\,\zeta\Big(1-s,\frac{l}{k}\Big)\\&=\frac{2\Gamma(s)}{k\cdot(2\pi)^s}\sum_{r=1}^{k}\zeta\Big(s,\frac{r}{k}\Big)\Big\{\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{l=1}^{k}\chi(l)\cos\frac{2\pi r l}{k}\\&\qquad\qquad+\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{l=1}^{k}\chi(l)\sin\frac{2\pi r l}{k}\Big\}\\&=\frac{2\Gamma(s)}{\sqrt{k}(2\pi)^s}\sum_{r=1}^{k}\zeta\Big(s,\frac{r}{k}\Big)\Big\{\cos\frac{s\pi}{2}\cdot\chi_1(r)+\sin\frac{s\pi}{2}\chi_2(r)\Big\};\end{aligned}$$

die nochmalige Anwendung von (25) liefert die behauptete Funktionalgleichung (24).

Hiernach kann man in (24) für s ganzzahlige Werte einsetzen oder auch Erörterungen über die Nullstellen der Funktionen $L(s)$ anknüpfen, wie das aus der Theorie der Charakterreihen bekannt ist, die natürlich die Hauptanwendung unseres Satzes bilden. Da für einen eigentlichen Charakter die eine der beiden Funktionen $\chi_1(n)$ und $\chi_2(n)$ für alle n verschwindet, während die andere sich von dem konjugierten Charakter $\bar{\chi}(n)$ nur um einen von n unabhängigen Faktor ε mit dem absoluten Betrag 1 unterscheidet, so erhält man aus (24) im Falle $\chi(-1)=1$

$$L(1-s)=\frac{2\varepsilon}{(2\pi)^s}k^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\bar{L}(s)$$

und im Falle $\chi(-1)=-1$

$$L(1-s)=\frac{2\varepsilon}{(2\pi)^s}k^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\bar{L}(s),$$

so daß erst an dieser Stelle die Zurückführung auf einen eigentlichen Charakter und die Unterscheidung der beiden Fälle nötig ist.

Wendet man im allgemeinen Fall auf die Ausdrücke $L_1(s)$ und $L_2(s)$ in (24) noch einmal die Funktionalgleichung an, so ergibt sich natürlich eine Identität, da man

$$\chi_{11}(n) = \frac{1}{2}(\chi(n) + \chi(k-n)), \qquad \chi_{22}(n) = \frac{1}{2}(\chi(n) - \chi(k-n)),$$
$$\chi_{12}(n) = \chi_{21}(n) = 0,$$

also

$$L_{11}(s) + L_{22}(s) = L(s), \qquad L_{12}(s) = L_{21}(s) = 0$$

findet.

(Eingegangen am 6. September 1929.)