

Artikel

## Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins Weyl, H.

in: Mathematische Annalen | Mathematische  
Annalen - 77 | Periodical issue  
40 Seite(n) (313 - 352)

---

### Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

### Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

### Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. \*)

Von

HERMANN WEYL in Zürich.

## § 1.

## Grundlagen. Der lineare Fall.

Es seien auf der Geraden der reellen Zahlen unendlich viele Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

markiert; wir rollen die Gerade auf einen Kreis vom Umfange 1 auf und fragen, ob dabei die an den Stellen  $\alpha_n$  befindlichen Marken schließlich den Umfang des Kreises überall gleich dicht bedecken. Dies würde dann der Fall sein, wenn die Anzahl  $n_\alpha$  derjenigen unter den  $n$  ersten Marken  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , welche beim Aufrollen in den Teilbogen  $\alpha$  der Kreisperipherie hineinfallen, asymptotisch durch  $|\alpha| \cdot n$  gegeben ist:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\alpha}{n} = |\alpha|;$$

unter  $|\alpha|$  ist dabei die Länge des Bogens  $\alpha$  verstanden. Dann und nur dann, falls diese Limesgleichung für jeden Teilbogen  $\alpha$  erfüllt ist, sprechen wir von einer gleichmäßig dichten Verteilung der Marken über die Kreisperipherie. Das Aufrollen der Geraden auf den Kreis besagt, daß wir die reellen Zahlen mod. 1 betrachten, d. h. daß zwei Zahlen bereits dann als gleich gelten, wenn sie sich um eine ganze Zahl unterscheiden. Unter den Zahlen  $x$ , welche einer gegebenen  $\alpha$  mod. 1 kongruent sind, gibt es eine und nur eine, welche der Ungleichung  $0 \leq x < 1$  genügt; diese, die Reduzierte von  $\alpha$  mod. 1, möge mit  $(\alpha)$  bezeichnet werden.

Um zu einem Kriterium für die Gleichverteilung zu gelangen, nehmen wir an, daß die Zahlen  $\alpha_n$  mod. 1 dieses Gesetz erfüllen. Dann behaupte

\*) Den gleichen Gegenstand wie die vorliegende Arbeit behandelt eine in den Göttinger Nachrichten (Sitzung vom 13. Juni 1914) erschienene Note des Verfassers.

ich, können wir daraus für jede beschränkte, Riemannisch integrierbare Funktion  $f(x)$ , die periodisch mit der Periode 1 ist, die Limesgleichung

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n f(\alpha_h) = \int_0^1 f(x) dx$$

erschließen; d. h. der mittels der diskreten Zahlen  $\alpha_n$  gebildete Mittelwert der Funktion  $f$  stimmt mit dem kontinuierlichen Mittelwert  $\int_0^1 f(x) dx$

überein. In der Tat besagt unsere Voraussetzung, daß (2) erfüllt ist für jede stückweis konstante Funktion von der Periode 1. Es liegt im Wesen einer im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  gegebenen, beschränkten, Riemannisch integrierbaren Funktion  $f(x)$ , daß zu ihr zwei stückweis konstante Funktionen  $f_1, f_2$  existieren, welche sie zwischen sich enthalten ( $f_1 \leq f \leq f_2$ ) und

deren Integrale  $\int_0^1 f_1 dx, \int_0^1 f_2 dx$  sich beliebig wenig voneinander unterscheiden. Sei der Unterschied dieser Integrale  $= \varepsilon$ , so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n f_1(\alpha_h) = \int_0^1 f_1 dx \geq \int_0^1 f dx - \varepsilon.$$

Für hinreichend großes  $n$  ist daher

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n f_1(\alpha_h) > \int_0^1 f dx - 2\varepsilon$$

also a fortiori

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n f(\alpha_h) > \int_0^1 f dx - 2\varepsilon.$$

Ebenso ergibt sich mit Benutzung von  $f_2$ , daß für hinreichend großes  $n$  die linke Seite

$$< \int_0^1 f dx + 2\varepsilon$$

ist, und damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Die einfachste Funktion von der Periode 1 ist

$$e^{2\pi i x} = e(x);$$

sie ist die eigentliche *analytische Invariante der Zahlklassen* mod. 1. Der reellen Zahl  $x$  die komplexe  $e(x)$  zuordnen, besagt nichts anderes, als den Prozeß des Aufrollens der Zahlgerade auf den Kreis vom Umfange 1 analytisch ausführen. Für jede ganze Zahl  $m$  hat auch  $e(mx)$  die Periode 1,

und daher gilt unter unserer obigen Annahme insbesondere für jede ganze Zahl  $m \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n e(m\alpha_h) = \int_0^1 e(mx) dx = 0.$$

Die Theorie der Fourierschen Reihen lehrt, daß aus den speziellen Funktionen  $e(mx)$  sich jede periodische Funktion linear zusammensetzen läßt. Daraus kann die folgende Umkehrung unseres Ergebnisses hergeleitet werden:

Satz 1. Gilt für jede ganze Zahl  $m \neq 0$  die Limesgleichung

$$\sum_{h=1}^n e(m\alpha_h) = o(n),$$

so genügen die Zahlen  $\alpha_n$  mod. 1 dem Gesetz der überall gleichmäßig dichten Verteilung.

In der Tat, da die Gleichung (2) für die Funktion  $e(0x) = 1$  selbstverständlich ist, folgt sie aus der in Satz 1 gemachten Annahme für jede abbrechende trigonometrische Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos 2\pi x + b_1 \sin 2\pi x) + \dots + (a_m \cos 2\pi mx + b_m \sin 2\pi mx).$$

Ist  $f(x)$  eine beliebige stetige Funktion von der Periode 1, so kann man bekanntlich zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  eine abbrechende trigonometrische Reihe  $f_\varepsilon$  finden, so daß  $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$  ist.  $f_1 = f_\varepsilon - \varepsilon$  und  $f_2 = f_\varepsilon + \varepsilon$  sind dann zwei abbrechende trigonometrische Reihen, welche  $f$  zwischen sich enthalten und deren Integrale

$$\int_0^1 f_1 dx, \quad \int_0^1 f_2 dx$$

sich um  $2\varepsilon$  voneinander unterscheiden. Wir schließen daraus wie oben, daß Gleichung (2) für die Funktion  $f$  gültig ist. Bezeichnet endlich  $f$  eine stückweis ~~konstante~~ <sup>stetige</sup> Funktion von der Periode 1, so kann man leicht (indem man etwa die Sprünge von  $f$  durch steile, geradlinige Böschungen ersetzt) zwei stetige Funktionen  $f_1, f_2$  finden, die  $f$  zwischen sich enthalten und deren Integrale beliebig wenig voneinander verschieden sind. Darum gilt (2) dann auch für eine solche Funktion  $f$ . In dem damit bewiesenen Satz 1 besitzen wir ein analytisch gut brauchbares Kriterium für die Gleichverteilung von Zahlfolgen mod. 1.

Wir geben sogleich eine Anwendung, indem wir zeigen:

Satz 2. Ist  $\xi$  eine irrationale Zahl, so liegen die ganzzahligen Vielfachen von  $\xi$ :

$$1\xi, 2\xi, 3\xi, \dots$$

mod. 1 überall gleich dicht.

Ist  $m$  eine ganze Zahl  $\neq 0$  und setzen wir  $m\xi = \eta$ , so haben wir nur festzustellen, daß

$$\sum_{h=1}^n e(h\eta) = o(n)$$

wird. Die linke Seite läßt sich aber als geometrische Reihe summieren, ihr absoluter Betrag ist

$$= \left| \frac{e((n+1)\eta) - e(\eta)}{e(\eta) - 1} \right| \leq \frac{2}{|e(\eta) - 1|} = \frac{1}{|\sin \pi \eta|},$$

ist also, da  $\eta$  keine ganze Zahl ist, nicht nur  $= o(n)$ , sondern bleibt sogar unterhalb einer endlichen Grenze.

Der Satz 2 ist von Bohl, Sierpiński und mir 1909—1910 auf Grund der Tatsache bewiesen worden, daß sich die irrationale Zahl  $\xi$  durch einen Bruch, dessen Nenner  $= o(n)$  ist, mit einem Fehler  $= o\left(\frac{1}{n}\right)$  approximieren läßt. \*) Ein weiterer elementarer, d. h. die Exponentialfunktion nicht benutzender Beweis rührt von Herrn H. Bohr her. \*\*) Er geht so vor: Man wähle eine große ganze Zahl  $H$  und verstehe unter  $\varepsilon$  die absolut kleinste Zahl, welche einer der Zahlen  $1\xi, 2\xi, \dots, H\xi \pmod{1}$  kongruent ist. Es sei etwa  $J\xi \equiv \varepsilon$ . Ferner seien  $[1] = a_1 b_1$  und  $[2] = a_2 b_2$  zwei Intervalle von gleicher Länge. Man kann die ganze positive Zahl  $L$  so bestimmen, daß  $a_1 + L\varepsilon \pmod{1}$  zwischen  $a_2 - \varepsilon$  (exkl.) und  $a_2$  (inkl.) liegt. Das Intervall, welches von  $a_1 + L\varepsilon$  bis  $b_1 + L\varepsilon$  reicht, heiße  $[2']$ . Jedesmal, wenn  $n\xi \pmod{1}$  im Intervall  $[1]$  liegt, liegt  $(n + LJ)\xi \pmod{1}$  im Intervall  $[2']$ , und umgekehrt. Bezeichnet  $n_1$  also die Anzahl derjenigen unter den  $n$  ersten Zahlen

$$(3) \quad 1\xi, 2\xi, 3\xi, \dots, n\xi,$$

welche  $\pmod{1}$  in  $[1]$  liegen, und haben die Zeichen  $n_2, n_2'$ , die analoge Bedeutung für die Intervalle  $[2], [2']$ , so bleibt  $|n_1 - n_2|$  für alle  $n$  unterhalb einer endlichen Grenze  $C$ . Dasjenige Stück  $\mathfrak{s}$  von  $[2']$ , das über  $[2]$  hinausragt, hat eine Länge  $< |\varepsilon|$ . Liegen zwei Zahlen  $h\xi$  und  $k\xi$  ( $h < k$ )  $\pmod{1}$  in  $\mathfrak{s}$ , so ist demnach  $(k - h)\xi \pmod{1}$  kleiner als  $\varepsilon$  und daher  $k - h > H$ . Also liegen von den Zahlen (3) höchstens  $\left[\frac{n}{H}\right] + 1$  in  $\mathfrak{s}$ . Die Anzahl derjenigen unter den Zahlen (3), die in  $[2]$  und  $[2']$  zugleich (d. h. in  $[2']$ , aber nicht in  $\mathfrak{s}$ ) liegen, ist demnach

\*) P. Bohl, Cr. J. 135 (1909), S. 189—283, insbesondere S. 222. W. Sierpiński, Krakau, Ak. Anz., math.-naturw. Kl., A, Jan. 1910, S. 9. H. Weyl, Rend. Circ. Mat. Palermo 30 (1910), S. 406.

\*\*) Vgl. H. Bohr und J. E. Littlewood, The Riemann Zeta-function and the Theory of Prime Numbers (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics; noch nicht erschienen).

$$\geq n_2 - \left[ \frac{n}{H} \right] - 1.$$

Infolgedessen ist a fortiori

$$n_2 \geq n_2 - \left[ \frac{n}{H} \right] - 1 \geq n_1 - \left[ \frac{n}{H} \right] - 1 - C.$$

Daraus ergibt sich

$$\limsup_{n=\infty} \frac{n_1 - n_2}{n} \leq \frac{1}{H},$$

und da  $H$  beliebig groß genommen werden kann,

$$\limsup_{n=\infty} \frac{n_1 - n_2}{n} \leq 0.$$

Da das Gleiche unter Vertauschung der Intervalle [1] und [2] gilt, muß

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_1 - n_2}{n} = 0$$

sein, d. h. in die Intervalle [1] und [2] von gleicher Länge entfallen asymptotisch gleich viele der Zahlen (3). Teilt man jetzt das ganze Intervall  $01$  in eine endliche Anzahl gleicher Teile  $\mathfrak{D}$  von der Länge  $\delta$ , so entfallen auf jedes  $\mathfrak{D}$  asymptotisch gleich viele der reduzierten Zahlen (3); da aber jede Zahl in einem und nur einem  $\mathfrak{D}$  gelegen ist, muß die Anzahl der auf jedes  $\mathfrak{D}$  entfallenden asymptotisch  $= \delta \cdot n$  sein. Daraus folgt unsere Behauptung (1) zunächst für jedes Intervall  $\alpha$ , das aus einer endlichen Anzahl von Intervallen  $\mathfrak{D}$  zusammengesetzt ist, und dann auch, da  $\delta$  beliebig klein genommen werden kann, für jedes beliebige Intervall.

Zum Schluß bemerken wir noch, zu unserer allgemeinen Frage zurückkehrend, daß die Limesgleichung (1), wenn sie überhaupt bei einer gegebenen Zahlenfolge  $\alpha_n$  für jedes Intervall  $\alpha$  zutrifft, auch gleichmäßig für alle Intervalle  $\alpha$  (von einer Länge  $< 1$ ) Gültigkeit hat. Denn teilen wir das Intervall  $01$  in eine endliche Anzahl von Teilen  $\mathfrak{D}$ , deren Länge  $= \delta$  ist, so gilt für alle  $n$  oberhalb einer gewissen Grenze und alle Intervalle  $\mathfrak{D}$

$$\delta(1 - \delta)n \leq n_{\mathfrak{D}} \leq \delta(1 + \delta)n.$$

Faßt man nun bei einem beliebig gegebenen Intervall  $\alpha$  einerseits diejenigen Intervalle  $\mathfrak{D}$  ins Auge, die im Innern von  $\alpha$  gelegen sind (sie haben eine Gesamtlänge  $> |\alpha| - 2\delta$ ), andererseits diejenigen, die überhaupt Punkte mit  $\alpha$  gemein haben (und deren Gesamtlänge  $< |\alpha| + 2\delta$  ist), so bekommt man für Werte  $n$ , die oberhalb der erwähnten Grenze liegen:

$$(|\alpha| - 2\delta)(1 - \delta)n \leq n_{\alpha} \leq (|\alpha| + 2\delta)(1 + \delta)n,$$

$$\left| \frac{n_{\alpha}}{n} - |\alpha| \right| \leq 3\delta + 2\delta^2.$$

## § 2.

**Übertragung auf mehrere Dimensionen. Anwendungen.**

Dadurch daß man  $p$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_p$  bestimmte Werte

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_p = \alpha_p$$

erteilt, erhält man einen Punkt  $(\alpha)$  im  $p$ -dimensionalen Raum; die  $\alpha_i$  sind seine Koordinaten. Zwei solche Punkte nennen wir kongruent (gemeint ist: mod. 1), wenn die entsprechenden Koordinaten der beiden Punkte einander mod. 1 kongruent sind. Unter denjenigen Punkten, welche dem gegebenen  $(\alpha)$  kongruent sind:

$$x_1 \equiv \alpha_1, x_2 \equiv \alpha_2, \dots, x_p \equiv \alpha_p \quad (\text{mod. } 1),$$

gibt es einen und nur einen, welcher dem Einheitswürfel  $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_p < 1$  angehört; ihn nennen wir den Reduzierten. Identifiziert man zwei Punkte, falls sie einander kongruent sind — oder faßt man jedes System kongruenter Punkte als einen einzigen „Punkt“ auf, so entsteht aus dem gewöhnlichen  $p$ -dimensionalen Raum eine geschlossene  $p$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{R}_p$ . Ein Raumstück (d. i. eine abgeschlossene, im Endlichen gelegene Punktmenge mit bestimmtem Volumen  $V$  im Cantor-Jordanschen Sinne) des gewöhnlichen Raumes ist, falls es keine zwei zueinander kongruente Punkte enthält, auch im  $\mathfrak{R}_p$  ein (einfach bedecktes) Raumstück vom Volumen  $V$ . Eine lineare Transformation

$$x_i = \sum_{k=1}^p a_{ik} x'_k + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

läßt sich dann und nur dann als eine Transformation des  $\mathfrak{R}_p$  ansprechen, wenn sie ganzzahlig und unimodular ist {d. h. wenn die Koeffizienten  $a_{ik}$  ganze Zahlen\*} von der Determinante  $\pm 1$  sind}.

Es sei im  $\mathfrak{R}_p$  eine unendliche Punktfolge

$$\alpha(n): x_1 \equiv \alpha_1(n), x_2 \equiv \alpha_2(n), \dots, x_p \equiv \alpha_p(n) \quad (\text{mod. } 1) \\ \{n = 1, 2, 3, \dots, \text{in inf.}\}$$

gegeben. Wir fragen wie oben im Falle  $p = 1$ : wann liegt diese Folge im  $\mathfrak{R}_p$  überall gleichmäßig dicht, d. h. wann ist die Anzahl derjenigen unter den  $n$  ersten der Punkte  $\alpha(n)$ , welche in einem beliebig abgegrenzten Raumstück vom Volumen  $V$  liegen, asymptotisch durch  $V \cdot n$  gegeben? Darauf antwortet das folgende, genau wie oben zu beweisende Kriterium:

\*) Die  $\alpha$  können beliebige Zahlen sein.

Satz 3. Die Punktfolge  $\alpha(n)$  erfüllt den  $\mathfrak{R}_p$  überall gleichmäßig dicht, wenn für jedes System ganzer, nicht sämtlich verschwindender Zahlen  $m_1, m_2, \dots, m_p$  die Limesgleichung

$$\sum_{h=1}^n e(m_1 \alpha_1(h) + m_2 \alpha_2(h) + \dots + m_p \alpha_p(h)) = o(n)$$

stattfindet.

Daraus ergibt sich sogleich folgende Verallgemeinerung von Satz 2:

Satz 4. Sind  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$  irgend  $p$  Zahlen, zwischen denen keine ganzzahlige lineare Relation besteht (d. h. keine Relation

$$l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 + \dots + l_p \xi_p = l,$$

in der die Koeffizienten  $l_i$  und  $l$ , ohne sämtlich zu verschwinden, ganze Zahlen sind), so liegt die Reihe der Punkte

$$(n \xi_1, n \xi_2, \dots, n \xi_p) \quad \{n = 1, 2, 3, \dots, \text{in inf.}\}$$

mod. 1 überall gleich dicht.

Die Behauptung, daß diese Punktfolge überall dicht liegt, ist der Inhalt eines berühmten Approximationssatzes von Kronecker.\*) Das vorliegende viel schärfere Theorem ist zuerst im Sommer 1913 von mir in einem Vortrag in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft aufgestellt und auf ähnliche Weise wie hier bewiesen worden. Die im wesentlichen übereinstimmenden, von Sierpiński, Bohl und mir herrührenden Beweise des Satzes 2 lassen sich auf den mehrdimensionalen Fall nicht übertragen, wohl aber ist das mit dem elementaren Bohrschen Beweis möglich. Betreffs der überraschenden Anwendungen, welche Herr Bohr von dem Kroneckerschen und diesem schärferen Theorem auf die Theorie der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion machte, verweisen wir den Leser auf die oben zitierte Schrift „The Riemann Zetafunction and the Theory of Prime Numbers“ von H. Bohr und J. E. Littlewood. — Wie sich die Aussage modifiziert, wenn zwischen den  $\xi_i$  eine oder mehrere ganzzahlige Relationen bestehen, soll im § 5 diskutiert werden.

Wir können den in Satz 4 die diskrete Reihe der ganzen positiven Zahlen durchlaufenden Parameter  $n$  durch einen kontinuierlichen Parameter  $t$ , den wir als *Zeit* deuten, ersetzen. Dann kommt:

Satz 5. Bewegt sich im  $\mathfrak{R}_p$  ein Punkt mit konstanter Geschwindigkeit auf gerader Linie:

$$(4) \quad x_i \equiv \alpha_i + \gamma_i t \quad (\alpha_i, \gamma_i \text{ Konstante}),$$

\*) Die Periodensysteme von Funktionen reeller Variablen, Berichte d. K. Preuß. Ak. d. W. zu Berlin 1884, S. 1071—1080, und: Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen, ebenda 1884, S. 1179—1193, 1271—1299. (Werke III 1, S. 32—109.)

so beträgt seine relative Verweilzeit in einem beliebigen Raumstück so viel, als das Volumen des Raumstücks angibt. Vorausgesetzt ist dabei, daß zwischen den Richtungszahlen  $\gamma_i$  keine homogene ganzzahlige lineare Relation besteht.

Ist während der langen Beobachtungszeit von  $t = 0$  bis  $t$  die Gesamtlänge derjenigen Zeitintervalle, während welcher der bewegliche Punkt sich in dem Gebiet  $G$  vom Volumen  $V$  aufhält,  $= t_G$ , so versteht man unter der relativen Verweilzeit im Gebiete  $G$  den  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t_G}{t}$ . Das Volumen

eines Gebietes  $G$  im  $\mathfrak{R}_p$  kann man als die apriorische Wahrscheinlichkeit dafür betrachten, daß ein willkürlich gewählter Punkt in dies Gebiet  $G$  hineinfällt, und unser Satz besagt also, daß für eine geradlinige, mit konstanter Geschwindigkeit durchmessene Bahn die relative Verweilzeit gleich der apriorischen Wahrscheinlichkeit ist. Die Beziehung zur statistischen Mechanik ist einleuchtend. — Sind  $m_1, m_2, \dots, m_p$  irgend  $p$  ganze Zahlen, die nicht alle verschwinden, und setzt man

$$m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \dots + m_p \alpha_p = \alpha, \quad m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 + \dots + m_p \gamma_p = \gamma,$$

so läßt unser auf einen kontinuierlich variierenden Parameter  $t$  übertragenes Prinzip (Satz 3) erkennen, daß man zum Beweise des Satzes 5 allein der Gleichung

$$\int_0^t e(\alpha + \gamma t) dt = o(t)$$

bedarf. Diese aber ist evident, da das Integral auf der linken Seite sich zu

$$\frac{e(\alpha + \gamma t) - e(\alpha)}{\gamma} = O(1)$$

berechnet.

Man kann Satz 5 in verschiedenen anderen Formulierungen aussprechen. Unter einem *geschlossenen Euklidischen Raume* versteht man jede geschlossene  $p$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, welche die Eigenschaft hat, daß zu jedem Punkt derselben eine Umgebung gehört, in welcher die Euklidische Geometrie gültig ist.\*)  $\mathfrak{R}_p$  ist ein solcher geschlossener Euklidischer Raum. Ist  $\Gamma_0$  irgend eine aus endlich vielen, sagen wir  $\nu$ , ganzzahligen unimodularen linearen Transformationen des  $\mathfrak{R}_p$  bestehende Gruppe und faßt man jedes System von  $\nu$  nach der Gruppe  $\Gamma_0$  äquivalenten Punkten des  $\mathfrak{R}_p$  als einen einzigen Punkt auf, so entsteht aus  $\mathfrak{R}_p$  ein

\*) Das Problem, die Axiome der Euklidischen wie Nicht-Euklidischen Geometrie so zu formulieren, daß sie nur über die Umgebung eines jeden Punktes (deren Ausdehnung unbestimmt bleibt) etwas aussagen, und dann zu untersuchen, welche im Sinne der Analysis situs verschiedenen Räume diesen Axiomen genügen, wird nach den Urhebern dieser Fragestellung das „Clifford-Kleinsche Problem der Raumformen“ genannt. Vgl. namentlich Klein, Über Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. 37.

geschlossener Euklidischer Raum  $\mathfrak{R}_p^{\Gamma_0}$ , über dem sich  $\mathfrak{R}_p$  als unbegrenzter und unverzweigter endlich-blättriger Überlagerungsraum ausbreitet, falls keine der zu  $\Gamma_0$  gehörigen Transformationen einen Fixpunkt in  $\mathfrak{R}_p$  besitzt. Es läßt sich streng beweisen (ich werde das im Anhang ausführen), daß jeder geschlossene Euklidische Raum ein solcher  $\mathfrak{R}_p^{\Gamma_0}$  ist. Demgemäß können wir behaupten:

Satz 6. *In einem geschlossenen Euklidischen Raum verlaufen alle geraden Linien, von leicht zu charakterisierenden Ausnahmegraden abgesehen, so, daß jede von ihnen jedem Punkt des Raumes beliebig nahe kommt und auch in jedem gleich großen Gebiet desselben durchschnittlich gleich lange verweilt.*

Läßt man im  $\mathfrak{R}_p$  zwei Punkte zusammenfallen, deren Koordinaten bis aufs Vorzeichen mod. 1 übereinstimmen, so daß dann ein einziger Punkt durch die Kongruenzen

$$x_1 \equiv \pm \alpha_1, x_2 \equiv \pm \alpha_2, \dots, x_p \equiv \pm \alpha_p \quad (\text{mod. } 1)$$

unter Zulassung aller  $2^p$  Vorzeichenkombinationen bestimmt wird, so hat jeder solche Punkt in dem Würfel von der Kantenlänge  $\frac{1}{2}$ :

$$0 \leq x_1, x_2, \dots, x_p \leq \frac{1}{2}$$

einen und nur einen Vertreter. In diesem Würfel stellt sich dann die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufene Gerade (4) als eine Zickzackbahn dar, die ein Massenpunkt im  $p$ -dimensionalen Raum beschreiben würde, der von den Wänden jenes Würfels nach dem gewöhnlichen Reflexionsgesetz zurückgeworfen wird (im Falle  $p = 2$  als die Bahn einer Billardkugel). Wenn zwischen den Geschwindigkeitskomponenten nach den Koordinatenachsen keine homogene ganzzahlige lineare Relation besteht, *verweilt also ein nach diesem Gesetz sich bewegendes Punkt in jedem gleich großen Gebiet des Würfels im Durchschnitt gleich lange*. Daß er jeder Stelle im Würfel beliebig nahe kommt, haben auf Grund des Kroneckerschen Approximationssatzes die Herren D. König und A. Szücs bereits früher gezeigt.\*) Es würde keine Schwierigkeiten machen, die möglichen Ausnahmefälle, von denen die Herren König und Szücs gleichfalls sprechen, vollständig durchzudiskutieren.

Den  $\mathfrak{R}_2$  kann man bekanntlich umkehrbar eindeutig und konform auf den *Torus* abbilden; die geraden Linien gehen über in die *Loxodromen* auf dem *Torus*, welche dessen *Meridiane* überall unter gleichem Winkel schneiden. Man kann dabei einen *Torus* von jeder Gestalt herausbekommen,

\*) Mouvement d'un point abandonné à l'intérieur d'un cube, Rend. Circ. Mat. Palermo 36 (1913).

wenn man in unseren Betrachtungen den  $\mathfrak{R}_2$  ersetzt durch diejenige zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit, in der zwei Punkte  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$  dann und nur dann zusammenfallen, wenn

$$x' \equiv x'' \pmod{a}, \quad y' \equiv y'' \pmod{b}$$

ist; unter  $a, b$  sind dabei zwei fest vorgegebene reelle Zahlen verstanden. Jede dieser Mannigfaltigkeiten läßt sich aber durch eine vorgängige affine Transformation der Koordinaten  $xy$  in den  $\mathfrak{R}_2$  verwandeln. Der Torus entstehe durch Rotation eines Kreises vom Radius  $r$ , und  $\kappa$  sei an jeder Stelle seiner Oberfläche der Wert der Gaußschen Krümmung. Dann können wir sagen: *Eine Loxodrome auf dem Torus verläuft* (abgesehen von leicht zu charakterisierenden Ausnahmen, die geschlossene Kurven sind) *so, daß sie ihn überall dicht bedeckt; die Dichtigkeit, mit der das geschieht, ist jedoch an verschiedenen Stellen nicht die gleiche, sondern proportional zu*  $1 - r^2 \kappa$  (ist also größer an den der Rotationsachse zugekehrten Teilen des Torus als an den abgewandten).

Für  $p = 2$  kann man den Satz 5 offenbar auch so aussprechen: *Ist  $\vec{\beta\delta}$  eine Strecke\*) im  $\mathfrak{R}_2$ , die der geradlinigen Bahn (4) des beweglichen Punktes nicht parallel ist, so kommt es im Durchschnitt pro Zeiteinheit so oft vor, daß der bewegliche Punkt diese Strecke überschreitet, als der Inhalt des aus der Strecke  $\vec{\beta\delta}$  und dem Geschwindigkeitsvektor  $(\gamma_1, \gamma_2)$  gebildeten Parallelogramms angibt.* Vorausgesetzt ist dabei, daß das Verhältnis der Geschwindigkeitskomponenten  $\gamma_1 : \gamma_2$  irrational ist.

Diese Formulierung rührt von Herrn Bohl her und ist von ihm aus Satz 2 hergeleitet worden. Er benutzte sie dazu, um eine von Lagrange aufgeworfene Frage über die *Superposition von Schwingungen* zu erledigen. Ein aus der Superposition von  $m$  einfachen Schwingungen hervorgehender Schwingungsvorgang wird durch eine Formel

$$(5) \quad z = \sum_{i=1}^m C_i e(\alpha_i + \gamma_i t)$$

beschrieben, in der die  $\alpha_i, \gamma_i$  reelle, die  $C_i$  positive Konstante sind; geometrisch läßt er sich in der komplexen  $z$ -Ebene durch eine Epizykelkurve darstellen. Wir schreiben  $z = r \cdot e(\sigma)$ , indem wir unter  $r (\geq 0)$  den absoluten Betrag und unter  $\sigma$  das Azimut von  $z$  verstehen. Lagrange warf die Frage auf, ob das Azimut  $\sigma$  im Durchschnitt pro Zeiteinheit um einen konstanten Betrag wächst, d. h. ob der  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{t}$  existiert. In einem besonderen Falle konnte Lagrange selber die Frage bereits beantworten; wenn

\*) Eine Strecke  $\vec{\beta\delta}$  ist im  $\mathfrak{R}_p$  natürlich nicht eindeutig durch Anfangs- und Endpunkt  $\beta$  und  $\delta$  bestimmt.

nämlich eines der  $C_i$ , etwa  $C_m$ , größer ist als die Summe aller andern, gilt — sogar dann, wenn man die Argumente  $\alpha_i + \gamma_i t$  durch unabhängige Variable ersetzt — stets

$$|\sigma - (\alpha_m + \gamma_m t)| < \frac{1}{4}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{t} = \gamma_m.$$

Herr Bohl konnte im Falle  $m = 3$  auch den Nicht-Lagrangeschen Fall erledigen. Er zeigte: Sind  $\pi A_i$  die Winkel des aus den drei Seiten  $C_i$  gebildeten Dreiecks, so ist

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{t} = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3.$$

Vorausgesetzt ist, daß zwischen den  $\gamma_i$  keine ganzzahlige lineare homogene Relation besteht. Beim Beweise darf man  $\alpha_3 = \gamma_3 = 0$  annehmen.

$$(7) \quad z = re(\sigma) = C_1 e(x_1) + C_2 e(x_2) + C_3$$

verschwindet als Funktion von  $x_1, x_2$  für die beiden Punkte

$$\beta: \begin{aligned} x_1 &\equiv \beta_1 = \frac{1 - A_2}{2} \\ x_2 &\equiv \beta_2 = \frac{1 + A_1}{2} \end{aligned} \pmod{1}; \quad \delta: \begin{aligned} x_1 &\equiv \delta_1 = \frac{1 + A_2}{2} \\ x_2 &\equiv \delta_2 = \frac{1 - A_1}{2} \end{aligned} \pmod{1}$$

im  $\mathfrak{R}_2$ . Schneidet man den  $\mathfrak{R}_2$  in der Strecke

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\beta\delta} x_1 &\equiv \beta_1 \tau + \delta_1(1 - \tau) \\ x_2 &\equiv \beta_2 \tau + \delta_2(1 - \tau) \end{aligned} \pmod{1} \quad \{0 \leq \tau \leq 1\}$$

auf, so kann man durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung zeigen, daß die durch (7) definierte Funktion  $\sigma = \sigma(x_1, x_2)$ , die um die Punkte  $\beta, \delta$  herum verzweigt ist, in dem aufgeschnittenen  $\mathfrak{R}_2$  eine stetige eindeutige Funktion ist, die aber über den Schnitt  $\overrightarrow{\beta\delta}$  hinüber den Sprung 1 erleidet. Daraus ergibt sich ohne weiteres das Bohlsche Gesetz.

Da der Satz 5 für jedes  $p$  gültig ist, macht es keine Schwierigkeiten, die Lagrangesche Frage nicht nur für  $m = 3$ , sondern für jedes  $m$  vollständig zu beantworten (was Herrn Bohl noch nicht gelungen war). Ist  $m = 4$ , so zerfällt der Nicht-Lagrangesche Fall noch wieder in zwei Unterfälle. Ich spreche hier das Resultat für den einen dieser Unterfälle aus\*):

Satz 7. *Es seien vier positive Zahlen  $C_1 < C_2 < C_3 < C_4$  gegeben, für die  $C_1 + C_4 > C_2 + C_3$  und  $C_4 < C_1 + C_2 + C_3$  ist. Alsdann vermag ein ebenes Gelenkviereck mit den Seiten  $C_i$  in einem einzigen Zykel die sämtlichen*

\*) Vgl. hierzu einen von mir auf der Frühlingstagung 1914 der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft gehaltenen Vortrag „Une application de la théorie des nombres à la mécanique statistique et à la théorie des perturbations“, Enseignement mathématique N<sup>o</sup>. 6, 16<sup>e</sup> Année (1914).

inkongruenten Zustände zu durchlaufen, deren ein ebenes Viereck mit den Seiten  $C_i$  überhaupt fähig ist. Bezeichnet  $2\pi\xi_i$  die Winkel, welche die Seiten  $C_i$  eines solchen Vierecks in seiner Ebene mit irgend einer fest in derselben angenommenen Geraden bilden, so kehren die Winkeldifferenzen  $2\pi(\xi_i - \xi_k)$  bei Durchlaufung eines solchen Zyklus sämtlich zu ihren Ausgangswerten zurück. Man bilde das über einen Zykel erstreckte Integral

$$A_1 = \frac{1}{2} \int (\xi_2 d\xi_3 - \xi_3 d\xi_2) + (\xi_3 d\xi_4 - \xi_4 d\xi_3) + (\xi_4 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_4)$$

und analog  $A_2, A_3, A_4$ . Diese Integrale sind unabhängig davon, in welcher Weise das ebene Gelenkviereck seine sämtlichen inkongruenten Zustände durchläuft und auch unabhängig davon, gegen welche feste Gerade die Winkel  $2\pi\xi_i$  gemessen werden. Ich nenne sie daher die Integralinvarianten des Gelenkvierecks. Ihre Summe ist = 1. Durch Superposition von vier einfachen Schwingungen mit den Amplituden  $C_i$  entsteht die Schwingung

$$z = re(\sigma) = \sum_{i=1}^4 C_i e(\alpha_i + \gamma_i t);$$

ihr Azimut  $\sigma$  wächst im Durchschnitt pro Zeiteinheit um  $\sum_{i=1}^4 \gamma_i A_i$ ,

falls zwischen den  $\gamma_i$  keine ganzzahlige lineare homogene Relation besteht.

Die Integralinvarianten  $A_i$  scheinen zu den Seiten  $C_i$  des Gelenkvierecks in analogen Beziehungen zu stehen, wie sie gemäß der ebenen Trigonometrie zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks statthaben.

Die Frage von Lagrange hat ein besonderes Interesse in der *Astronomie*. Dort bedeutet  $r$  die numerische Exzentrizität einer Planetenbahn,  $\sigma$  aber die Perihellänge (oder  $r$  den Sinus der Bahnneigung gegen die unveränderliche Ebene des Planetensystems und  $\sigma$  die Knotenlänge). Formeln von der Gestalt (5) stellen also insbesondere das *säkulare Vorrücken von Perihel- und Knotenlänge* dar. Der Nicht-Lagrangesche Fall liegt in unserem Sonnensystem nur vor für *Venus* und *Erde*.

### § 3.

#### Die Reihe $\sum e(\varphi(n))$ für ein Polynom $\varphi$ .

Bisher haben wir angenommen, daß die Punkte im  $\mathfrak{R}_p$ , die wir betrachteten, in *linearer* Weise von einem, sei es kontinuierlichen, sei es die ganzen Zahlen durchlaufenden Parameter abhängen. Wir gehen jetzt zu dem allgemeineren Fall über, daß diese Abhängigkeit durch *Polynome höheren Grades* gegeben wird. Lassen wir den Parameter  $t$  (die Zeit)

kontinuierlich alle Werte durchlaufen, so können die entsprechenden Fragen sogleich erledigt werden auf Grund der Formel

$$(8) \quad \int_0^t e(\varphi(t)) dt = o(t),$$

die gültig ist, wenn  $\varphi(t)$  irgend ein Polynom von  $t$  ist, das sich nicht auf eine bloße Konstante reduziert. Nachdem der lineare Fall besprochen ist, können wir den Grad von  $\varphi(t)$  größer als 1 annehmen. Wir bestimmen ein  $t_0$  so, daß für  $t \geq t_0$  die Ableitung  $\varphi'(t)$  beständig dasselbe Vorzeichen, etwa das positive hat, und machen in dem Integral

$$2\pi i \cdot \int_{t_0}^t e(\varphi(t)) dt \quad (t > t_0)$$

die Substitution  $\varphi(t) = x$ . Es geht dann über in

$$2\pi i \int_{t=t_0}^t e(x) \frac{dx}{\varphi'(t)} = \int_{t_0}^t \frac{de(x)}{\varphi'(t)}.$$

Partielle Integration liefert:

$$\left[ \frac{e(x)}{\varphi'(t)} \right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} e(\varphi(t)) dt.$$

Da  $\int_{t_0}^{\infty} \frac{|\varphi''|}{\varphi'^2} dt$  konvergiert, ergibt sich daraus die Konvergenz von

$$\int_0^{\infty} e(\varphi(t)) dt.$$

Gleichung (8) ist also sogar in der schärferen Form

$$\int_0^t e(\varphi(t)) dt = O(1)$$

bewiesen. Mit Hilfe unseres Prinzipes erschließen wir daraus:

Satz 8. Sind  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_p(t)$  irgend  $p$  Polynome von solcher Art, daß keine mittels ganzzahliger, nicht sämtlich verschwindender Koeffizienten aus ihnen zu bildende lineare Kombination sich auf eine bloße Konstante reduziert, so verweilt ein nach dem Gesetz

$$x_i \equiv \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

im  $\mathfrak{R}_p$  sich bewegendes Punkt in jedem gleich großen Raumstück (bei unendlich ausgedehnter Beobachtungszeit) im Durchschnitt gleich lange

Schwieriger wird die Untersuchung, wenn wir den kontinuierlichen Parameter  $t$  durch den diskreten  $n$  ersetzen, welcher der Reihe nach die natürlichen Zahlen durchläuft. Es kommt alles darauf an, zu zeigen:

Satz 9. Ist in einem Polynom  $q^{\text{ten}}$  Grades  $\varphi(z)$ :

$$\varphi(z) = \alpha_q z^q + \alpha_{q-1} z^{q-1} + \cdots + \alpha_0$$

einer der Koeffizienten  $\alpha_q, \alpha_{q-1}, \dots, \alpha_1$  irrational, so gilt die Limesgleichung

$$(9) \quad \sum_{h=0}^n e(\varphi(h)) = o(n).$$

{Zusatz: Ist  $\alpha_l$  unter den irrationalen Koeffizienten derjenige, welcher den höchsten Index  $l$  trägt, so gilt (9) bei festem  $\alpha_l$  gleichmäßig mit Bezug auf alle Werte der folgenden Koeffizienten  $\alpha_{l-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ .}

Für  $\varphi(z) = \alpha z^2$  ist dieser Satz zuerst von den Herren Hardy und Littlewood in Cambridge (1912) ausgesprochen worden.\*) Für Polynome  $\varphi(z)$  vom 2. Grade haben die beiden Autoren einen auf der Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes beruhenden Beweis seither in den Acta Math. publiziert\*\*); wie ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn Hardy entnehme, haben sie aber die Gültigkeit von Satz 9 genau in dem gleichen Umfange wie ich erkannt, und ihr Beweis, der von dem meinigen durchaus abweicht, wird binnen kurzem in den Acta Math. erscheinen.

Ich betrachte im gewöhnlichen  $q$ -dimensionalen Raum alle Gitterpunkte  $r = (r_1, r_2, \dots, r_q)$ , d. h. alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten  $r_i$ , welche dem „oktaedrischen“ Bereich

$$|r| = |r_1| + |r_2| + \cdots + |r_q| \leq n$$

angehören. Ihre Anzahl heiße  $n_q$ ; sie ist

$$= 2^q \binom{n}{q} + 2^{q-1} \binom{n}{q-1} \binom{q}{1} + 2^{q-2} \binom{n}{q-2} \binom{q}{2} + \cdots + 1,$$

Doch kommt es auf den genauen Wert von  $n_q$  nicht an; wir brauchen nur die (zahengeometrisch ja ohne weiteres evidente) für unendlich große  $n$  gültige asymptotische Formel

$$n_q \sim \frac{(2n)^q}{q!}.$$

Dem Beweis von Satz 9 müssen wir diesen Hilfssatz vorausschicken:

\*) In ihrem Vortrag „Some problems of Diophantine approximation“; vgl. den Kongreßbericht.

\*\*\*) Acta Mathematica 37, S. 193–238, Theorem 2.14 auf S. 213. Diese Arbeit ist die Fortsetzung der auf S. 155 beginnenden Abhandlung „Some problems of Diophantine Approximations“, deren 3. Teil gegenwärtig noch aussteht.

Es sei  $\xi$  eine irrationale Zahl. Unter den  $n_q$  Gitterpunkten

$$\mathfrak{r} = (r_1, r_2, \dots, r_q),$$

welche dem oktaedrischen Bereich  $|\mathfrak{r}| \leq n$  angehören, fassen wir diejenigen ins Auge, für welche die Zahl

$$r_1 r_2 \dots r_q \xi \pmod{1}$$

in dem beliebig vorgegebenen Intervall ab von der Länge  $c = b - a < 1$  gelegen ist; ihre Anzahl, wird behauptet, beträgt asymptotisch  $c \cdot n_q$ .

Gemäß dem in Satz 1 aufgestellten Prinzip hat man zum Beweise nur die Limesgleichung

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n_q} \sum_{|\mathfrak{r}| \leq n} e(r_1 r_2 \dots r_q \xi) = 0$$

herzuleiten. Trifft diese nämlich für jede irrationale Zahl  $\xi$  zu, so wird sie außer für  $\xi$  auch für jedes ganzzahlige Multiplum  $m\xi$  von  $\xi (m \neq 0)$  bestehen. Da für  $q = 1$  die behauptete Gleichung richtig ist, können wir den Beweis mittels des Schlusses von  $q - 1$  auf  $q$  erbringen. Ich führe in der Summe auf der linken Seite von (10) zunächst die Summation nach  $r_q$ , dann nach den übrigen  $r$  aus. Bezeichnet  $\mathfrak{r}'$  den „projizierten“ Gitterpunkt  $(r_1, r_2, \dots, r_{q-1})$  im  $(q-1)$ -dimensionalen Koordinatenraum ( $x_q = 0$ ), so setze ich also

$$\sum_{\mathfrak{r}} = \sum_{\mathfrak{r}'} \sum_{r_q}$$

Die äußere Summation nach  $\mathfrak{r}'$  erstreckt sich dabei über den oktaedrischen Bereich  $|\mathfrak{r}'| \leq n$  und für jedes solche  $\mathfrak{r}'$  die innere über alle der Bedingung

$$|r_q| \leq n - |\mathfrak{r}'|$$

genügenden ganzen Zahlen. Die innere Summation kann ich ausführen (geometrische Reihe); sie ergibt, wenn noch

$$r_1 r_2 \dots r_{q-1} = R$$

gesetzt wird,

$$\left| \sum_{r_q} e(r_q R \xi) \right| \leq \frac{1}{|\sin(\pi R \xi)|}.$$

Da jene Summe aus höchstens  $2n + 1$  Gliedern besteht, gilt außerdem

$$\left| \sum_{r_q} e(r_q R \xi) \right| \leq 2n + 1.$$

Ich wähle eine positive Zahl  $\varepsilon (< \frac{1}{2})$ . Wir wollten annehmen, daß unser Satz für  $q - 1$  bereits feststünde; dann wissen wir, daß die Anzahl derjenigen unter den  $n_{q-1}$  Gitterpunkten  $\mathfrak{r}'$ , für welche  $R\xi \pmod{1}$  zwischen  $-\varepsilon$  und  $+\varepsilon$  liegt, asymptotisch  $= 2\varepsilon \cdot n_{q-1}$ , mithin für hinreichend großes  $n$  gewiß  $< 3\varepsilon \cdot n_{q-1}$  ist. Für diese  $\mathfrak{r}'$  wenden wir die zweite der

eben angegebenen Abschätzungen der inneren Summe an, für die übrigen liefert die erste:

$$\left| \sum_{r_q} e(r_q R \xi) \right| \leq \frac{1}{\sin \pi s}.$$

Wir haben insgesamt

$$\left| \sum_{r'} e(r_1 r_2 \cdots r_q \xi) \right| = \left| \sum_{r'} \right| \leq \sum_{r'} \left| \sum_{r_q} \right| \leq n_{q-1} \left\{ 3\varepsilon(2n+1) + \frac{1}{\sin \pi s} \right\}.$$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{q-1}(2n+1)}{n_q} = q$$

ist, wird infolgedessen für hinreichend hohe  $n$ :

$$\frac{1}{n_q} \left| \sum_{r'} e(r_1 r_2 \cdots r_q \xi) \right| < \varepsilon(3q+1),$$

und das war der Inhalt unserer Behauptung.

Beim Beweise von Satz 9 werden wir diese Folgerung unseres Hilfsatzes zu verwenden haben: Diejenigen Systeme ganzer Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_{q-1}$ , für welche

$$|r'| = |r_1| + |r_2| + \cdots + |r_{q-1}| \leq n$$

ist und  $R\xi = r_1 r_2 \cdots r_{q-1} \xi \pmod{1}$  zwischen  $-\varepsilon$  und  $+\varepsilon$  liegt, sind für hinreichend große  $n$  in einer Anzahl  $< 3\varepsilon \cdot n_{q-1}$  vorhanden.

Nachdem dies vorausgeschickt ist, können wir die Untersuchung der Summe

$$\sigma_n = \sum_{h=0}^n e(\varphi(h))$$

in Angriff nehmen. Wir setzen zunächst voraus, daß der höchste Koeffizient  $\alpha_q$  von  $\varphi(s)$  irrational ist.

1. Schritt. Die Konjugierte von  $\sigma_n$  ist

$$\bar{\sigma}_n = \sum_{h=0}^n e(-\varphi(h));$$

also

$$|\sigma_n|^2 = \sigma_n \bar{\sigma}_n = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n e(\varphi(h)) \cdot e(-\varphi(k)) = \sum_{h,k} e(\varphi(h) - \varphi(k)).$$

Ich setze  $h = k + r$ ; dann wird

$$\varphi(h) = \varphi(k+r) = \varphi(k) + r\varphi(r, k).$$

$\varphi(r, k)$  ist eine ganze rationale Funktion von  $k$  und  $r$ , die nur Glieder  $(q-1)^{\text{ter}}$  oder niederer Ordnung enthält; in ihrem Ausdruck kommt der

Koeffizient  $\alpha_0$  nicht mehr vor; die Entwicklung nach fallenden Potenzen von  $k$  beginnt mit dem Term  $q\alpha_q k^{q-1}$ . Wir haben also jetzt

$$|\sigma_n|^2 = \sum_r \sum_k e(r\varphi(r, k)).$$

Der Summationsbereich wird beschrieben durch:

$$0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq k + r \leq n.$$

$r$  durchläuft also das ganze Intervall von  $-n$  bis  $+n$ , und in der inneren Summe durchläuft  $k$  für jedes solche  $r$  die sämtlichen ganzen Zahlen des Intervalls von  $0$  bis  $n - |r|$  oder von  $|r|$  bis  $n$ , je nachdem  $r \geq 0$  oder  $r \leq 0$  ist.

2. Schritt. Verwenden wir das Zeichen  $n_q$  für  $q = 1, 2, \dots$  in der gleichen Bedeutung wie im Hilfssatz, so erhält man aus der letzten Gleichung mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$|\sigma_n|^4 \leq n_1 \sum_r \left| \sum_k e(r\varphi(r, k)) \right|^2.$$

Nunmehr wiederhole ich das beim ersten Schritt befolgte Verfahren. Es ist

$$\left| \sum_k e(r\varphi(r, k)) \right|^2 = \sum_{k, l} e(r\varphi(r, k) - r\varphi(r, l)).$$

Wiederum schreibe ich

$$k = l + s, \quad \varphi(r, k) = \varphi(r, l + s) = \varphi(r, l) + s\varphi(r, s, l).$$

Die ganze rationale Funktion  $\varphi(r, s, l)$  von  $r, s$  und  $l$  enthält nur Glieder der Ordnung  $\leq q - 2$  und beginnt bei der Entwicklung nach absteigenden Potenzen von  $l$  mit dem Term  $q(q-1)\alpha_q l^{q-2}$ ; die Koeffizienten  $\alpha_0, \alpha_1$  kommen nicht mehr vor. Im gegenwärtigen Stadium ist

$$|\sigma_n|^4 \leq n_1 \sum_{r, s} \sum_l e(rs\varphi(r, s, l)).$$

$(r, s)$  durchläuft hier das zweidimensionale „Oktaeder“  $|r| + |s| \leq n$  und  $l$  dasjenige Intervall, welches aus dem oben geschilderten Summationsintervall von  $k$  entsteht, wenn man hinten oder vorn  $|s|$  Zahlen abstreicht, je nachdem  $s \geq 0$  oder  $s \leq 0$  ist.

Der 3. Schritt beginnt mit abermaliger Anwendung der Schwarzschen Ungleichung, welche liefert:

$$|\sigma_n|^8 \leq n_1^2 n_3 \sum_{r, s} \left| \sum_l e(rs\varphi(r, s, l)) \right|^2,$$

und geht dann in der gleichen Weise weiter wie oben.

Wir müssen diesen Prozeß fortsetzen bis zur Ausführung des  $(q-1)$ ten Schrittes. Dazu müssen wir die Summationsbuchstaben  $h, k, l, \dots; r, s, \dots$  durch Indizes unterscheiden, etwa so:

$$\begin{aligned}
h_1 &= r_1 + h_2; \varphi(h_1) &= \varphi(h_2) &+ r_1 \varphi(r_1, h_2), \\
h_2 &= r_2 + h_3; \varphi(r_1, h_2) &= \varphi(r_1, h_3) &+ r_2 \varphi(r_1, r_2, h_3), \\
&\dots && \dots \\
h_{q-1} &= r_{q-1} + h; \varphi(r_1, \dots, r_{q-2}, h_{q-1}) &= \varphi(r_1, \dots, r_{q-2}, h) &+ r_{q-1} \varphi(r_1, r_2, \dots, r_{q-1}, h).
\end{aligned}$$

Es wird das letzte, von den  $q$  Argumenten  $r_1, r_2, \dots, r_{q-1}, h$  abhängige  $\varphi$  nur Glieder der 0. und 1. Ordnung enthalten, und der Koeffizient, mit welchem  $h$  multipliziert ist, lautet  $q! \alpha_q$ :

$$\varphi(r_1, r_2, \dots, r_{q-1}, h) = q! \alpha_q h + (\beta_0 + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \dots + \beta_{q-1} r_{q-1}).$$

Die konstanten Koeffizienten  $\beta$  berechnen sich aus den beiden ersten Koeffizienten  $\alpha_q, \alpha_{q-1}$  von  $\varphi(z)$  in einer Weise, die uns hier nicht weiter zu interessieren braucht. Führe ich folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
R &= r_1 r_2 \dots r_{q-1}, \quad \varrho = R(\beta_0 + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \dots + \beta_{q-1} r_{q-1}), \quad \xi = q! \alpha_q, \\
Q &= 2^{q-1}, \quad N = (n_1)^{2^{q-3}} (n_2)^{2^{q-4}} \dots n_{q-3}^2 n_{q-2},
\end{aligned}$$

(für  $q = 2$  ist  $N = 1$  zu setzen), so kommt schließlich die Ungleichung

$$(11) \quad |\sigma_n|^Q \leq N \sum_{r'} \left\{ e(\varrho) \sum_h e(R\xi h) \right\}$$

zustande, in welcher  $r' = (r_1, r_2, \dots, r_{q-1})$  das Oktaeder  $|r'| \leq n$  durchläuft,  $h$  aber ein von  $r'$  abhängiges zusammenhängendes Intervall von  $n + 1 - |r'|$  ganzen Zahlen; dasselbe entsteht dadurch aus  $0n$ , daß man der Reihe nach ( $i = 1, 2, \dots, q-1$ ) jedesmal  $|r_i|$  Zahlen hinten oder vorn abstreicht, je nachdem  $r_i \geq 0$  oder  $\leq 0$  ist. Ersetzt man in dem Ausdruck für  $N$  jedes  $n_i$  durch  $n^i$ , so geht  $N$  in eine Potenz von  $n$  über, deren Exponent

$$1 \cdot 2^{q-3} + 2 \cdot 2^{q-4} + 3 \cdot 2^{q-5} + \dots + (q-2) \cdot 2^0 = Q - q$$

ist. Daher gilt für  $N$  selber eine asymptotische Formel

$$N \sim \kappa \cdot n^{Q-q},$$

in der  $\kappa$  eine nur von  $q$  abhängige Konstante ist.

In (11) können wir die innere Summe nach  $h$ , da sie eine geometrische Reihe ist, auswerten. Wir bekommen für alle  $r'$ , für die  $R\xi$  mod. 1 nicht zwischen  $-\varepsilon$  und  $+\varepsilon$  liegt,

$$\left| \sum_h \right| \leq \frac{1}{\sin \pi \varepsilon};$$

für die übrigen  $r'$ , deren Anzahl bei hinreichend großem  $n$  kleiner ist als  $3\varepsilon \cdot n_{q-1}$ , benutzen wir wieder die rohe Abschätzung

$$\left| \sum_h \right| \leq n + 1.$$

Dann folgt aus unserer Formel (11) die Ungleichung

$$|\sigma_n|^q \leq N \cdot n_{q-1} \left\{ 3\varepsilon(n+1) + \frac{1}{\sin \pi \varepsilon} \right\}.$$

Sobald  $n$  hinreichend groß ist, wird daher

$$\left| \frac{\sigma_n}{n} \right|^q \leq 3\varepsilon \left( \frac{n \cdot 2^{q-1}}{(q-1)!} + 1 \right),$$

und unser Beweis ist beendet.

Wenn der höchste Koeffizient nicht irrational ist, sondern etwa  $\alpha_q, \alpha_{q-1}, \dots, \alpha_{i+1}$  rational sind, aber  $\alpha_i$  irrational, so sei  $G$  der Generalnenner der Brüche  $\alpha_q, \alpha_{q-1}, \dots, \alpha_{i+1}$ . Wir trennen dann die  $\sum_n$  in  $G$  Teile je nach dem Rest, welchen  $n$  mod.  $G$  läßt. Wir ersetzen also  $n$  durch  $Gn + r$  und haben

$$\sum_{h=0}^{Gn-1} e(\varphi(h)) = \sum_{r=0}^{G-1} \sum_{h=0}^n e(\varphi(Gh+r)).$$

Es ist aber  $\varphi(Gs+r)$  für jedes  $r=0, 1, \dots, G-1$  einem Polynom  $\psi_r(s)$  vom  $l^{\text{ten}}$  Grade mod. 1 kongruent,\*) dessen höchster Koeffizient  $\alpha_i G^i$  irrational ist. Infolgedessen ist jede einzelne der  $G$  Summen, in die wir unsere ursprüngliche zerlegt haben,  $= o(n)$ .

Neben  $\sigma_n$  kann man Reihen wie

$$\sum n e(\varphi(n)), \quad \sum \frac{1}{n} e(\varphi(n))$$

oder allgemein

$$\sum_n a_n e(\varphi(n))$$

betrachten, in denen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  positive Zahlen sind, deren Summe divergiert.

Satz 10. *Die Limesgleichung*

$$\sum_{h=0}^n a_h e(\varphi(h)) = o\left(\sum_{h=0}^n a_h\right)$$

gilt für jede divergente Reihe  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ , deren positive Glieder monoton abnehmen. Nehmen die Glieder monoton zu, so gilt die gleiche Behauptung jedenfalls immer dann, wenn

$$n a_n = O\left(\sum_{h=0}^n a_h\right)$$

ist; also beispielsweise stets, wenn  $a_n$  wie eine Potenz von  $n$  wächst.

\*) Zwei Polynome heißen kongruent mod. 1, wenn ihre Differenz ein Polynom mit lauter ganzzahligen Koeffizienten ist.

Dies ergibt sich in bekannter Weise durch Anwendung der partiellen Summation. Es ist

$$\sum_{h=0}^n a_h e(\varphi(h)) = a_n \sigma_n + \sum_{h=0}^{n-1} \sigma_h (a_h - a_{h+1}).$$

Ist  $\varepsilon$  eine vorgegebene positive Zahl, so gilt von einem bestimmten  $h$  ab  $|\sigma_h| < \varepsilon \cdot h$ , und darum ist

$$\left| \sum_{h=0}^n a_h e(\varphi(h)) \right| \leq C_\varepsilon + \varepsilon n a_n + \varepsilon \sum_{h=0}^{n-1} h |a_h - a_{h+1}|,$$

wo  $C_\varepsilon$  eine wohl von  $\varepsilon$ , aber nicht von  $n$  abhängige Konstante bedeutet. Nehmen die  $a_n$  monoton ab, so ist die Summe rechts

$$= \sum_{h=0}^{n-1} h (a_h - a_{h+1}) = \sum_{h=1}^n a_h - n a_n,$$

und wir finden

$$\left| \sum_{h=0}^n a_h e(\varphi(h)) \right| \leq C_\varepsilon + \varepsilon \sum_{h=0}^n a_h.$$

Damit ist dieser Fall erledigt. Nehmen hingegen die  $a_n$  monoton zu, so ist die Summe rechts

$$= \sum_{h=0}^{n-1} h (a_{h+1} - a_h) = n a_n - \sum_{h=1}^n a_h < n a_n,$$

und wir bekommen

$$\left| \sum_{h=0}^n a_h e(\varphi(h)) \right| \leq C_\varepsilon + 2\varepsilon n a_n.$$

Ich hebe insbesondere die Gleichung

$$\sum_{h=1}^n \frac{e(\varphi(h))}{h} = o(\lg n)$$

hervor.\*)

\*) Das ursprüngliche Ziel der Hardy-Littlewoodschen Untersuchung war die Gewinnung der Limesgleichung

$$\zeta(1 + it) = o(\lg t)$$

für die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion, d. i.

$$(*) \quad \sum_{n=1}^t \frac{e^{it \lg n}}{n} = o(\lg t).$$

Dies kann man gleichfalls mittels der hier auf  $\sum e(\varphi(n))$  angewendeten Methode be-

Auch Fälle, in denen die Reihe  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  konvergiert, sind von Wichtigkeit. Betrachten wir z. B. die einfachste  $\vartheta$ -Funktion:

$$\vartheta(v; z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{n^2} e^{2\pi i n v} \quad (|z| < 1)$$

für reelle Argumentwerte  $v$  ( $z$  ist der gewöhnlich mit  $q$  bezeichnete Modul). Schreiben wir, indem wir  $|z| = r$  setzen,  $z = r e^{2\pi i \alpha}$  und behalten von der Summe zunächst nur den Teil bei, der von  $n=0$  bis  $+\infty$  läuft, so geht die  $\vartheta$ -Reihe über in

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{n^2} e(\varphi(n)) \quad \{\varphi(n) = \alpha n^2 + v n\}.$$

Wir wollen das Verhalten der  $\vartheta$ -Funktion untersuchen, wenn der Modul  $z$  längs eines Radius gegen einen auf dem Einheitskreis gelegenen Punkt konvergiert, d. h. wir wollen  $r$  (unter Festhaltung von  $\alpha$  und  $v$ ) von kleineren Werten her zu 1 konvergieren lassen. Unsere Reihe können wir schreiben

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n,$$

indem wir  $c_n = 0$  setzen, falls  $n$  keine Quadratzahl ist, wenn aber  $n$  eine Quadratzahl  $= m^2$  ist,  $c_n = e(\varphi(m))$ . Hier liefert die partielle Summation

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (r^n - r^{n+1}) = (1-r) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n, \\ C_n &= c_0 + c_1 + \dots + c_n = \sum_{m=0}^{\sqrt{n}} e(\varphi(m)). \end{aligned}$$

Wenn  $\alpha$  irrational ist, wird

$$C_n = o(\sqrt{n}) \quad \text{oder} \quad C_n = o\left(\frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}\right).$$

Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} r^n = (1-r)^{-\frac{3}{2}}$$

ist, gilt also

$$\lim_{r \rightarrow 1} \left\{ \sqrt{1-r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \right\} = 0.$$

weisen; es liegt dieser Satz sogar, wie mir scheinen will, weniger tief als der Satz 9, da man zur Herleitung von (\*) sich nicht auf das „Prinzip“ (Satz 1) zu stützen braucht. Ich werde meinen Beweis später (vielleicht im Anschluß an die Arbeit der Herren Hardy und Littlewood über diesen Gegenstand) veröffentlichen.

Wir erhalten demnach für die  $\vartheta$ -Funktion:\*)

$$\vartheta(z; v) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-|z|}}\right).$$

Etwas Entsprechendes findet statt für die allgemeinere Funktion

$$\vartheta(z; v_1, v_2, \dots, v_{q-1}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{n^q} e(v_1 n + v_2 n^2 + \dots + v_{q-1} n^{q-1}).$$

Satz 11. *Läßt man  $z$  bei konstantem, mit  $2\pi$  inkommensurablen Azimut gegen den Einheitskreis konvergieren, so ist*

$$\vartheta(z; v_1, v_2, \dots, v_{q-1}) = o\left(\frac{1}{\sqrt[2]{1-|z|}}\right)$$

*gleichmäßig in den reellen Argumenten  $v$ .*

#### § 4.

#### Folgerungen für die Gleichverteilung von Punkten im $\mathfrak{R}_p$ .

Aus Satz 9 fließen auf Grund des Prinzips, auf das unsere ganze Untersuchung basiert ist, diese Folgerungen:

Satz 12. *Ist  $\varphi(z)$  ein Polynom mit dem konstanten Term  $\alpha_0$  und sind nicht alle Koeffizienten von  $\varphi(z) - \alpha_0$  rational, so liegt die Reihe der Zahlen*

$$\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \dots$$

*mod. 1 überall gleich dicht.*

Insbesondere:

Satz 13. *Ist  $\xi$  eine irrationale Zahl, so bedeckt die Reihe der Punkte*

$$1\xi, 4\xi, 9\xi, 16\xi, 25\xi, \dots,$$

*wenn man die Zahlgerade auf den Kreis vom Umfang 1 aufrollt, die Peripherie des Kreises überall gleich dicht. Das Entsprechende gilt, wenn man die Quadratzahlen ersetzt durch die Kubikzahlen oder die vierten Potenzen usw.*

Allgemeiner:

Satz 14. *Sind*

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_p(z)$$

*irgend  $p$  Polynome von der Art, daß keine mittels beliebiger, nicht sämtlich verschwindender ganzer Zahlen aus den  $\varphi_i(z)$  gebildete lineare Kombination ein Polynom ergibt, das einer Konstanten mod. 1 kongruent ist, so liegt die Reihe der Punkte*

\*) Vgl. Hardy und Littlewood, Theorem 7 des Cambridger Vortrags.

$$x_1 \equiv \varphi_1(n), x_2 \equiv \varphi_2(n), \dots, x_p \equiv \varphi_p(n) \pmod{1}$$

$$\{n = 1, 2, 3, \dots \text{ in inf.}\}$$

im  $\mathfrak{R}_p$  überall gleich dicht.

Denn für jedes System nicht sämtlich verschwindender ganzer Zahlen  $m_1, m_2, \dots, m_p$  ist

$$\varphi(z) = m_1 \varphi_1(z) + m_2 \varphi_2(z) + \dots + m_p \varphi_p(z)$$

ein Polynom, das die Voraussetzung des Satzes 9 erfüllt.

In Satz 14 sind als besondere Tatsachen enthalten:

Satz 15. Ist  $\xi$  eine irrationale Zahl und grenzt man im Einheitsintervall 01 irgend  $q$  Intervalle  $a_i b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) ab, so ist die Anzahl derjenigen unter den  $n$  ersten ganzen Zahlen  $h = 1, 2, \dots, n$  befindlichen, für welche die mod. 1 reduzierte Zahl  $(h\xi)$  in  $a_1 b_1$  und zugleich  $(h^2\xi)$  in  $a_2 b_2, \dots, (h^q\xi)$  in  $a_q b_q$  liegt, asymptotisch

$$= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_q - a_q)n$$

für  $\lim n = \infty$ .

Satz 16. Sind  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$  irgend  $p$  Zahlen, zwischen denen keine ganzzahlige lineare Relation besteht, und grenzt man im Einheitsintervall beliebige  $pq$  Strecken  $a_{ij} b_{ij}$  ab, so sind diejenigen unter den Zahlen  $h = 1, 2, \dots, n$ , für welche die sämtlichen Ungleichungen

$$a_{11} \leq (h\xi_1) \leq b_{11}, a_{21} \leq (h^2\xi_1) \leq b_{21}, \dots, a_{q1} \leq (h^q\xi_1) \leq b_{q1},$$

$$a_{12} \leq (h\xi_2) \leq b_{12}, a_{22} \leq (h^2\xi_2) \leq b_{22}, \dots, a_{q2} \leq (h^q\xi_2) \leq b_{q2},$$

$$\dots$$

$$a_{1p} \leq (h\xi_p) \leq b_{1p}, a_{2p} \leq (h^2\xi_p) \leq b_{2p}, \dots, a_{qp} \leq (h^q\xi_p) \leq b_{qp}$$

bestehen, asymptotisch in der Anzahl

$$n \cdot \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^p (b_{ij} - a_{ij})$$

vorhanden.

Auch die Herren Hardy und Littlewood haben in ihrer ersten Arbeit in den Acta Math. (auf elementarem Wege) gezeigt, daß Zahlen  $h$  von der in Satz 15 und 16 geforderten Beschaffenheit überhaupt existieren; sie bedürfen dieser Tatsache zu ihrem Beweis des Satzes 9. Die hier aufgestellten Theoreme, die wir in umgekehrter Wegrichtung aus dem anders und direkt bewiesenen Satze 9 erschlossen haben, sind von ihnen nur vermutet worden.

Ein weiterer interessanter Spezialfall von Satz 14 ist dieser:

Satz 17. Ist  $\varphi(z)$  ein Polynom, in welchem  $z^k$  die höchste vorkommende, einen irrationalen Koeffizienten tragende Potenz ist, und achtet man

darauf, wann und wie oft es vorkommt, daß je  $l$  aufeinanderfolgende der Zahlen

$$\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \dots$$

mod. 1 der Reihe nach in  $l$  vorgegebene Intervalle  $a_i b_i$  fallen, so stellt sich heraus, daß die relative Häufigkeit eines solchen Vorkommnisses gleich der apriorischen Wahrscheinlichkeit  $\prod_{i=1}^l (b_i - a_i)$  ist.

Man hat zu prüfen, ob es  $l$  ganze Zahlen  $m_0, m_1, \dots, m_{l-1}$  geben kann, so daß

$$\sum_{r=0}^{l-1} m_r \varphi(z+r)$$

ein Polynom ist, dessen sämtliche Koeffizienten, vom konstanten Gliede abgesehen, rationale Zahlen sind. Bei der Prüfung dieser Frage kann man  $\varphi$  ersetzen durch dasjenige verkürzte Polynom, welches aus  $\varphi$  entsteht, wenn man alle Glieder mit höherer Potenz als  $z^l$  streicht. Ist das verkürzte

$$\varphi(z) \text{ gleich } \alpha z^l + \alpha_1 z^{l-1} + \dots + \alpha, \quad (\alpha \text{ irrational}),$$

so hat man

$$\varphi(z+r) = \alpha z^l + \left( \alpha \binom{l}{1} r + \alpha_1 \right) z^{l-1} + \left( \alpha \binom{l}{2} r^2 + \alpha_1 \binom{l-1}{1} r + \alpha_2 \right) z^{l-2} + \dots$$

Sollen die Zahlen  $m_r$  die geforderte Beschaffenheit haben, so ergeben sich also der Reihe nach die Gleichungen

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{l-1} m_r & = 0, \\ \sum_{r=0}^{l-1} r m_r & = 0, \\ \dots & \dots \\ \sum_{r=0}^{l-1} r^{l-1} m_r & = 0, \end{cases}$$

und daraus erhält man

$$m_0 = m_1 = \dots = m_{l-1} = 0.$$

Zugleich erkennt man, daß der Satz für mehr als  $l$  aufeinanderfolgende der  $\varphi(n)$  nicht mehr richtig sein kann.

## § 5.

**Die Ausnahmefälle.**

Es seien wieder

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_p(z)$$

irgend  $p$  Polynome mit reellen Koeffizienten ohne konstantes Glied.\*) Ich nehme jetzt an, es gäbe ganze Zahlen  $l_i$ , so daß

$$l_1 \varphi_1(z) + l_2 \varphi_2(z) + \dots + l_p \varphi_p(z)$$

ein Polynom mit lauter rationalen Koeffizienten wird. Ein System ganzer Zahlen  $(l_1, l_2, \dots, l_p)$ , für welches dieser Umstand eintritt, will ich als einen „Punkt  $\mathfrak{I}$ “ bezeichnen. Die Punkte  $\mathfrak{I}$  bilden ein *Gitter*; d. h. mit  $\mathfrak{I}$  ist auch immer  $-\mathfrak{I}$  und mit zwei Punkten  $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}'$  auch die Summe  $\mathfrak{I} + \mathfrak{I}'$  ein „Punkt  $\mathfrak{I}$ “.\*\*\*) Nach einem bekannten Verfahren, das von Minkowski als „Adaption eines Zahlgitters an ein enthaltenes“ bezeichnet wird,\*\*\*)) lassen sich jetzt Punkte  $\mathfrak{I}$ :

$$\mathfrak{I}_k = (l_{k1}, l_{k2}, \dots, l_{kp}) \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

in einer Anzahl  $q \leq p$  so bestimmen, daß zwischen ihnen keine Relation

$$\sum_{k=1}^q y_k \mathfrak{I}_k = 0 \text{ mit beliebigen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten}$$

$y_k$  besteht, alle Punkte  $\mathfrak{I}$  sich aber mittels *ganzzahliger* Koeffizienten  $h_k$  aus den  $\mathfrak{I}_k$  zusammensetzen lassen:

$$\mathfrak{I} = \sum_{k=1}^q h_k \mathfrak{I}_k.$$

Diejenigen Punkte  $\mathfrak{z} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ , die mit Hilfe beliebiger *reeller* Koeffizienten  $y_k$  in der Form

$$\mathfrak{z} = \sum_{k=1}^q y_k \mathfrak{I}_k$$

dargestellt werden können, bilden im gewöhnlichen  $p$ -dimensionalen Raum eine  $q$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}$ . Ich verstehe unter einem Gitterpunkt jeden Punkt  $\mathfrak{z}$  mit ganzzahligen Koordinaten  $x_i$ ; dann behaupte ich, bilden die Punkte  $\mathfrak{I}$  die sämtlichen, auf der linearen Mannig-

\*) Die letzte Annahme wird nur der bequemeren Ausdrucksweise wegen gemacht.

\*\*) In welchem Sinne hier Punkte mit Zahlfaktoren multipliziert und addiert werden, bedarf wohl kaum einer ausdrücklichen Erklärung.

\*\*\*)) Diophantische Approximationen (Leipzig 1907), § 14; kürzer ist das Verfahren beschrieben z. B. auf S. 78 meines Buches „Die Idee der Riemannschen Fläche“ (Leipzig 1913).

faltigkeit  $\mathfrak{Y}$  gelegenen Gitterpunkte. Da zwischen den Punkten  $l_k$  keine lineare Relation besteht, findet sich in dem Schema

$$\begin{cases} l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1p}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ l_{q1}, l_{q2}, \dots, l_{qp} \end{cases}$$

eine  $q$ -reihige, von 0 verschiedene Determinante, etwa

$$L = \left\| l_{ik} \right\|_{\substack{i=1,2,\dots,q \\ k=1,2,\dots,q}}$$

Aus den ersten  $q$  der Gleichungen

$$x_i = \sum_{k=1}^q y_k l_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

geht, wenn  $\mathfrak{x} = (x_i)$  ein auf  $\mathfrak{Y}$  gelegener Gitterpunkt ist, durch Auflösung nach  $y$  hervor, daß die  $y_k$  gebrochene Zahlen mit dem Nenner  $L$  sind. Mithin ist  $L\mathfrak{x}$  ein Punkt  $l$ , infolgedessen aber auch (man gehe auf die Definition der Punkte  $l$  zurück)  $\mathfrak{x}$  selbst, und daher müssen gemäß der Auswahl der Punkte  $l_k$  die Koeffizienten  $y_k$  ganze Zahlen gewesen sein.

Da alle in  $\mathfrak{Y}$  gelegenen Gitterpunkte folglich in der Form  $\sum_{k=1}^q y_k l_k$  mittels ganzer  $y_k$  dargestellt werden können, findet man durch Fortsetzung des Adaptionsverfahrens, daß man zu den Gitterpunkten  $l_1, l_2, \dots, l_q$  noch  $r = p - q$  weitere

$$m_h = (m_{h1}, m_{h2}, \dots, m_{hp}) \quad (h = 1, 2, \dots, r)$$

so hinzufügen kann, daß jeder Gitterpunkt  $\mathfrak{x}$  eine Darstellung

$$(12) \quad \mathfrak{x} = (y_1 l_1 + y_2 l_2 + \dots + y_q l_q) + (z_1 m_1 + \dots + z_r m_r)$$

mittels ganzzahliger Koeffizienten  $y_k, z_h$  gestattet. Die Gleichung (12) oder

$$x_i = (l_{1i} y_1 + l_{2i} y_2 + \dots + l_{qi} y_q) + (m_{1i} z_1 + \dots + m_{ri} z_r)$$

ergibt demnach eine ganzzahlige, unimodulare lineare Transformation der Koordinaten  $x$  in die neuen Koordinaten  $y, z$ , bei welcher das System der Gitterpunkte erhalten bleibt. Das Gleiche gilt demnach auch für die kontragrediente Substitution

$$(13) \quad \begin{cases} y_k = \sum_{i=1}^p l_{ki} x_i & (k = 1, 2, \dots, q), \\ z_h = \sum_{i=1}^p m_{hi} x_i & (h = 1, 2, \dots, r). \end{cases}$$

Diese Formeln stellen mithin eine lineare Transformation im  $\mathfrak{R}_p$  dar.

Wir bilden insbesondere die Polynome

$$\begin{cases} f_k(z) = \sum_{i=1}^p l_{ki} \varphi_i(z) & (k = 1, 2, \dots, q), \\ \psi_h(z) = \sum_{i=1}^p m_{hi} \varphi_i(z) & (h = 1, 2, \dots, r). \end{cases}$$

Die ersten  $q$  haben lauter rationale Koeffizienten, deren Generalnenner mit  $G$  bezeichnet werde. Mit Bezug auf die letzten  $r$  aber gilt, daß keine mittels ganzer Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_r$  gebildete Kombination  $\sum_{h=1}^r t_h \psi_h(z)$  derselben ein Polynom mit rationalen Koeffizienten wird, es sei denn, daß alle  $t_h = 0$  sind. Wir haben die Aufgabe, die durch

$$x_i \equiv \varphi_i(n) \pmod{1} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

definierten Punkte im  $\mathfrak{R}_p$  zu studieren, während  $n$  der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen durchläuft. Durch unsere ganzzahlige unimodulare Transformation kommt diese Frage darauf hinaus, die Punkte  $(y, z)$ :

$$\begin{aligned} y_k &\equiv f_k(n), & z_h &\equiv \psi_h(n) \pmod{1} \\ (k = 1, 2, \dots, q) & & (h = 1, 2, \dots, r) \end{aligned}$$

zu untersuchen. Für jede ganze Zahl  $n$  wird durch die Kongruenzen

$$y_1 \equiv f_1(n), y_2 \equiv f_2(n), \dots, y_q \equiv f_q(n) \pmod{1}$$

allein in dem (auf die Koordinaten  $y, z$  bezogenen)  $\mathfrak{R}_p$  eine bestimmte  $r$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{C}_n$  definiert. Alle  $\mathfrak{C}_n$  sind untereinander parallel, weil sie der  $r$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$y_1 \equiv 0, y_2 \equiv 0, \dots, y_q \equiv 0 \pmod{1}$$

parallel sind. Außerdem ist  $\mathfrak{C}_n$  mit  $\mathfrak{C}_m$  identisch, wenn die beiden ganzen Zahlen  $n$  und  $m$  mod.  $G$  kongruent sind, so daß man sich auf die Betrachtung einer einzigen Periode

$$(14) \quad \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_G$$

zu beschränken hat. Unter den  $\mathfrak{C}_n$  gibt es also nur endlich viele voneinander verschiedene:  $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \dots$ ; diese mögen in einer einzelnen Periode (14) bzw.  $m', m'', \dots$ -mal vorkommen ( $m' + m'' + \dots = G$ ). Wir behaupten: Die Punkte

$$(15) \quad \begin{aligned} y_k &\equiv f_k(n), & z_h &\equiv \psi_h(n) \pmod{1} \\ (k = 1, 2, \dots, q) & & (h = 1, 2, \dots, r) \end{aligned}$$

im  $\mathfrak{R}_p$  verteilen sich, wenn  $n$  die Reihe der ganzen positiven Zahlen durchläuft, mit völlig gleichmäßiger Dichte über die untereinander parallelen

$r$ -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_G$ . Das ist so zu verstehen, daß die Dichte für jede einzelne dieser Mannigfaltigkeiten allerorten dieselbe ist, auf zwei verschiedenen von ihnen, etwa  $\mathfrak{C}'$ ,  $\mathfrak{C}''$ , deren Multiplizitäten  $m', m''$  proportional ist.

Daß Punkte (15) nur auf den  $\mathfrak{C}_n$  angetroffen werden, ist ja selbstverständlich. Um die gleichmäßig dichte Verteilung zu beweisen, wiederholen wir unsere in den vorigen Paragraphen durchgeführte Methode, indem wir zeigen, daß für jede beschränkte, auf den  $\mathfrak{C}_n$  definierte Funktion

$$F(y_1, y_2, \dots, y_q; z_1, z_2, \dots, z_r),$$

die nach den  $z_h$  Riemannisch integrierbar ist und in allen Variablen die Periode 1 besitzt, die Limesgleichung besteht:

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(y_k = f_k(n), z_h = \psi_h(n)) \\ = \frac{1}{G} \sum_{n=1}^G \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 F(y_k = f_k(n); z_1, z_2, \dots, z_r) dz_1 dz_2 \dots dz_r.$$

Es genügt, das für

$$F = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_q) \cdot e(t_1 z_1 + \dots + t_r z_r)$$

zu bestätigen, wenn die  $t$  beliebige ganze Zahlen sind und  $\Phi$  eine nur für jene  $C$  Wertsysteme ( $y$ ) definierte Funktion ist, die sich gemäß der Formel  $y_k \equiv f_k(n) \pmod{1}$  periodisch wiederholen, wenn  $n$  die natürlichen Zahlen durchläuft. Ist eine der ganzen Zahlen  $t_h \neq 0$ , so hat nach Satz 9 die linke Seite der behaupteten Gleichung (16) den Wert 0. Dasselbe trifft auch für die rechte Seite zu, da jedes Glied der dort stehenden  $G$ -gliedrigen Summe  $= 0$  ist. Wenn aber alle Zahlen  $t_h = 0$  sind, ist  $F$  eine Funktion der  $y$  allein; für solche Funktionen ist die Gültigkeit unserer Gleichung unmittelbar einleuchtend.

Die Formulierung des Ergebnisses kann man von der zum Beweise benutzten linearen Transformation unabhängig machen.

Satz 18. Es seien irgend  $p$  Polynome  $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_p(z)$  mit reellen Koeffizienten gegeben;  $\alpha_i$  sei das konstante Glied in  $\varphi_i(z)$ . Unter einem „Punkt“ verstehen wir jedes System ganzer Zahlen  $\mathfrak{l} = (l_1, l_2, \dots, l_p)$ , für welches die lineare Kombination

$$l_1 \{ \varphi_1(z) - \alpha_1 \} + l_2 \{ \varphi_2(z) - \alpha_2 \} + \dots + l_p \{ \varphi_p(z) - \alpha_p \} = f_1(z)$$

ein Polynom mit rationalen Koeffizienten wird. Die Koeffizienten der sämtlichen, den verschiedenen Punkten  $\mathfrak{l}$  entsprechenden Polynome  $f_1(z)$  besitzen einen Generalnenner  $G$ . Für jede beliebige ganze Zahl  $n$  definieren die simultan für alle Punkte  $\mathfrak{l}$  zu erfüllenden Kongruenzen

$$l_1(x_1 - \alpha_1) + l_2(x_2 - \alpha_2) + \dots + l_p(x_p - \alpha_p) \equiv f_1(n) \pmod{1}$$

im  $\mathfrak{R}_p$  eine lineare  $r$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{C}_n$ . Die  $\mathfrak{C}_n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) sind alle untereinander parallel und wiederholen sich in einem Zyklus von der Periode  $G$ ; die endlich vielen verschiedenen unter ihnen  $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \dots$  mögen in einem solchen Zyklus bzw. mit der Vielfachheit  $m', m'', \dots$  auftreten. Die durch

$$x_1 \equiv \varphi_1(n), x_2 \equiv \varphi_2(n), \dots, x_p \equiv \varphi_p(n) \pmod{1}$$

definierten Punkte im  $\mathfrak{R}_p$  verteilen sich, wenn für  $n$  der Reihe nach alle ganzen positiven Zahlen eintreten, auf die endlich vielen linearen Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \dots$  in der Weise, daß jede derselben nicht nur überall dicht, sondern auch überall mit gleichmäßiger Dichte bedeckt wird, für zwei verschiedene der  $\mathfrak{C}$  aber diese Dichten sich wie ihre Multiplizitäten  $m$  verhalten.

Man ist auf Grund dieses Satzes imstande, anzugeben, wie sich die Aussage des Satzes 15 modifiziert, falls zwischen den Zahlen  $\xi_i$  ganzzahlige lineare Relationen bestehen, und das Analogon von Satz 16 auch für den Fall aufzustellen, wo man mehr als  $l$  sukzessive unter den Zahlen  $\varphi(n)$  simultan betrachtet.

## § 6.

### Ausdehnung auf mehrere Parameter.

Bisher haben wir ganze rationale Funktionen *einer* Variablen  $z$  betrachtet und darin  $z$  die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen lassen. Wir können unsere Untersuchungen noch in der Richtung verallgemeinern, daß wir an Stelle der einen Variablen  $z$  deren mehrere treten lassen. Ich beschränke mich auf den Fall von zwei Variablen  $u, v$ . Es seien also etwa wieder  $p$  ganze rationale Funktionen

$$\varphi_1(uv), \varphi_2(uv), \dots, \varphi_p(uv)$$

gegeben, und wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, daß keine mittels ganzzahliger Koeffizienten aus ihnen zu bildende lineare Kombination ein Polynom wird, das einer Konstanten mod. 1 kongruent ist. In der  $uv$ -Ebene sei ferner ein endliches Flächenstück  $\mathfrak{R}$  (d. h. eine abgeschlossene, ganz im Endlichen gelegene Punktmenge mit bestimmtem Flächeninhalt  $J > 0$ ) gegeben. Dilatieren wir  $\mathfrak{R}$  vom Nullpunkte aus im Verhältnis  $t:1$  zu dem Flächenstück  $t\mathfrak{R}$  — wobei  $t$  eine große reelle Zahl sein soll —, so wird die Anzahl  $n_t$  der in  $t\mathfrak{R}$  gelegenen Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten  $u, v$ ) asymptotisch für  $\lim t = \infty$  durch  $J \cdot t^2$  gegeben. Jedem dieser Gitterpunkte  $u, v$  ordnen wir in  $\mathfrak{R}_p$  den Punkt

$$(17) \quad x_1 \equiv \varphi_1(uv), x_2 \equiv \varphi_2(uv), \dots, x_p \equiv \varphi_p(uv) \pmod{1}$$

zu. Grenzen wir in  $\mathfrak{R}_p$  ein beliebiges Volumen  $V$  ab, so wird jetzt die Behauptung der Gleichverteilung so lauten:

Satz 19. *Unter den  $n_t$  Punkten (17), die man erhält, wenn man für  $u, v$  die sämtlichen in  $t\mathfrak{R}$  gelegenen Gitterpunkte einsetzt, sondere man diejenigen aus, welche in  $\mathfrak{R}_p$  dem Raumstück  $V$  angehören; ihre Anzahl  $n_t^{(V)}$  verhält sich zu  $n_t$  im Limes für  $t = \infty$  wie  $V:1$ .*

Sollte die Voraussetzung betreffs der ganzzahligen linearen Kombinationen der Funktionen  $\varphi_i(uv)$  nicht zutreffen, so modifiziert sich die Aussage in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen. Sind die  $\varphi_i$  lineare Funktionen von  $u$  und  $v$ , so ist damit erst der *allgemeinste*, von Kronecker aufgestellte Approximationssatz in der Art verschärft, daß die Aussage „überall dicht“ durch „überall gleichmäßig dicht“ ersetzt worden ist.\*) Der Beweis wird erbracht sein, wenn wir zeigen:

Satz 20. *Ist  $\varphi(uv)$  eine ganze rationale Funktion von  $u, v$ , deren Koeffizienten, vom konstanten Gliede abgesehen, nicht sämtlich rational sind, und bildet man die Summe*

$$\sigma_t = \sum e(\varphi(u, v))$$

über alle  $n_t$  Gitterpunkte  $(u, v)$ , die dem Flächenstück  $t\mathfrak{R}$  angehören, so ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_t}{n_t} = 0.$$

Ein besonderer Fall dieser Sätze kommt z. B. zustande, wenn man bei einer oder mehreren ganzen rationalen Funktionen  $\Phi(z)$  mit beliebigen komplexen Koeffizienten für  $z$  die sämtlichen ganzen Zahlen des Gaußschen Körpers ( $i = \sqrt{-1}$ ) setzt und nach der Verteilung der Werte dieser Funktion für die angegebenen Argumente fragt, unter der Voraussetzung, daß zwei komplexe Zahlen (Werte der Funktion  $\Phi$ ), die sich um eine ganze Zahl des Gaußschen Körpers unterscheiden, nicht als verschieden gelten. Man wird dabei  $z$  zunächst durch die Bedingung  $|z| \leq t$  beschränken und dann die positive Zahl  $t$  ins Unendliche wachsen lassen.

Man könnte statt der hier gemachten Annahme, daß der allseitig ins Unendliche wachsende Bereich  $t\mathfrak{R}$ , der nach und nach alle Gitterpunkte umfassen soll, sich *ähnlich* vergrößert, auch andere allgemeinere Voraussetzungen treffen; doch will ich mich auf die Durchführung des Beweises für einen nach dem Gesetz der Ähnlichkeit wachsenden Bereich beschränken. Die Exhaustion von  $\mathfrak{R}$  zeigt dann, daß es genügt,  $\mathfrak{R}$  als ein Rechteck

$$a_1 \leq u \leq a_2, \quad b_1 \leq v \leq b_2,$$

anzunehmen. Die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen  $u$ , welche der Ungleichung

$$a_1 t \leq u \leq a_2 t$$

\*) Vgl. Werke III 1, S. 104—105.

genügen, sei  $= m_t \{ \sim (a_2 - a_1)t \}$ , die Anzahl der ganzen Zahlen  $v$ , für die

$$b_1 t \leq v \leq b_2 t$$

ist, betrage  $n_t \{ \sim (b_2 - b_1)t \}$ ; in  $t\mathfrak{R}$  sind dann  $m_t n_t$  Gitterpunkte  $(u, v)$  gelegen.

Wir denken uns  $\varphi(u, v)$  nach fallenden Potenzen von  $v$  und die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von  $v$ , welche Polynome in  $u$  sind, nach fallenden Potenzen von  $u$  geordnet. Es enthält keine Einschränkung, wenn wir annehmen, daß bei dieser Anordnung das höchste Glied eine *irrationale* Zahl zum Koeffizienten besitzt. Wir schreiben:

$$\varphi(uv) = v^q \psi(u) + v^{q-1} \psi_1(u) + \dots$$

Wenn wir nicht auf den Fall einer Variablen zurückkommen wollen, muß  $q \geq 1$  sein. Auf

$$\sigma_t = \sum_{a_1 t \leq u \leq a_2 t} \left\{ \sum_{b_1 t \leq v \leq b_2 t} e(\varphi(u, v)) \right\}$$

wenden wir, wenn  $q > 1$  ist, die Schwarzsche Ungleichung an:

$$|\sigma_t|^2 \leq m_t \sum_u \left| \sum_v e(\varphi(u, v)) \right|^2$$

und formen  $\left| \sum_v \right|^2$  nach der in § 3 dargelegten Methode um. Wir erhalten dann schließlich bei Benutzung der dort eingeführten Bezeichnungen

$$(18) \quad |\sigma_t|^q \leq m_t^{q-1} N_t \cdot \sum_{u; r_1, r_2, \dots, r_{q-1}} \left\{ e(\varrho) \sum_h e(q! \psi(u) r_1 r_2 \dots r_{q-1} h) \right\},$$

$$N_t \sim \kappa \cdot n_t^{q-1}.$$

Der Bereich der äußeren Summation ist gegeben durch

$$(19) \quad a_1 t \leq u \leq a_2 t, \quad |r| = |r_1| + |r_2| + \dots + |r_{q-1}| \leq n_t - 1.$$

Die innere Summation erstreckt sich über ein zusammenhängendes Intervall von  $n_t - |r|$  ganzen Zahlen. Wir sollen zeigen, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_t}{m_t n_t} = 0$$

ist. Wenn  $\psi(u)$  die Variable  $u$  nicht enthält, also eine irrationale Konstante  $\alpha$  ist, ergibt sich dies durch die gleiche Schlußweise, wie bei einer Variablen. Wenn  $\psi$  aber die Variable  $u$  enthält, haben wir uns auf den folgenden Hilfssatz zu stützen:

*Diejenigen unter allen  $m_t n_t^{(q-1)}$ , den Bedingungen (19) genügenden Gitterpunkte  $(u; r_1, r_2, \dots, r_{q-1})$ , für welche*

$$r_1 r_2 \dots r_{q-1} \cdot \varphi(u)$$

*mod. 1 zwischen  $-\varepsilon$  und  $+\varepsilon$  liegt, sind in einer Anzahl vorhanden, die sich im Limes für  $t = \infty$  zu  $m_t n_t^{(q-1)}$  verhält wie  $2\varepsilon : 1$ . Dabei ist  $\varphi(u)$  irgend ein Polynom in  $u$ , dessen höchster Koeffizient irrational ist.*

Diesen Hilfssatz haben wir auf das Polynom  $\varphi(u) = q! \psi(u)$  zur Anwendung zu bringen. Wir gewinnen ihn durch einen vollständigen Induktionsschluß. Für  $q = 1$  ist er richtig (Satz 9). Unter der Voraussetzung seiner Gültigkeit für  $q$  zeigen wir, daß er auch für  $q + 1$  zutrifft. Es genügt dazu der Nachweis, daß

$$(20) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m_t n_t^{(q)}} \sum_{u; r_1, r_2, \dots, r_q} e(r_1 r_2 \cdots r_q \varphi(u)) = 0$$

ist, wenn die Summe über

$$a_1 t \leq u \leq a_2 t, \quad |r_1| + |r_2| + \cdots + |r_q| \leq n_t - 1$$

erstreckt wird. Wir führen bei festen  $u; r_1, r_2, \dots, r_{q-1}$  zunächst die Summation nach  $r_q$  aus und wenden für diese einfache Summe wie früher eine doppelte Abschätzung an, je nachdem  $r_1 r_2 \cdots r_{q-1} \varphi(u) \pmod{1}$  zwischen  $-\varepsilon$  und  $+\varepsilon$  liegt oder nicht. Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Anzahl der Wertsysteme  $(u; r_1, r_2, \dots, r_{q-1})$  von der ersten Eigenschaft asymptotisch  $2\varepsilon m_t n_t^{(q-1)}$  beträgt, erhalten wir dann auf die gleiche Art wie beim Beweise des Hilfssatzes in § 3 die Limesgleichung (20).

Die *zwei* Veränderlichen  $u, v$  kann man durch drei und mehr ersetzen. Von dem so verallgemeinerten Satz 19 ist der eben erwähnte Hilfssatz, auf dem zu einem wesentlichen Teil unsere Untersuchung beruhte, ein ganz spezieller Fall.

## § 7.

### Über die Gleichverteilung willkürlicher Zahlenfolgen.

Die Herren Hardy und Littlewood werfen die allgemeine Frage auf, wann eine Folge wachsender ganzer Zahlen

$$l_1 < l_2 < l_3 < \cdots$$

die Eigenschaft besitzt, daß für jede irrationale Zahl  $\xi$  die Reihe der Größen

$$(21) \quad l_1 \xi, l_2 \xi, l_3 \xi, \dots$$

mod. 1 jedem Wert beliebig nahe kommt.\*) Wir fragen sogleich, wann diese Zahlenfolge überall gleich dicht liegt. Eine erschöpfende Antwort läßt sich darauf nicht geben. Wohl aber läßt sich behaupten, daß bei gegebenen  $l_n$  für jeden Wert von  $\xi$  die Zahlenreihe (21) überall gleich dicht liegt, wenn man von Zahlen  $\xi$  absieht, die einer gewissen Menge vom Maße 0 angehören. Diese Ausnahmemenge enthält selbstverständlich

\*) Acta Math. 37, S. 156.

alle rationalen Zahlen, es bleibt aber unentschieden, ob nicht etwa noch weitere Zahlen in ihr enthalten sind. Wenn ich nun freilich glaube, daß man den Wert solcher Sätze, in denen eine unbestimmte Ausnahmemenge vom Maße 0 auftritt, nicht eben hoch einschätzen darf, möchte ich diese Behauptung hier doch kurz begründen. Mein Beweis beruht auf dem folgenden Lemma der Integralrechnung.\*)

Sind  $f_n(x)$  stetige Funktionen im Intervall 01, für welche die Summe der Integrale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx$$

konvergiert, so konvergiert für alle  $x$  mit Ausnahme solcher, die einer Menge vom Maße 0 angehören,  $f_n(x)$  mit unbegrenzt wachsendem  $n$  gegen 0.

Beweis: Ist  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Zahl,  $\mathfrak{A}_n$  diejenige Menge im Intervall 01, in der  $|f_n(x)| \geq \varepsilon$  ist, so ergibt sich für das Lebesguesche Maß  $A_n$  dieser Menge  $\mathfrak{A}_n$  die Ungleichung

$$\varepsilon^2 A_n \leq \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx.$$

Bilden wir die Vereinigungsmenge

$$\mathfrak{C}_n = \mathfrak{A}_{n+1} + \mathfrak{A}_{n+2} + \dots + \text{in inf.}$$

so sind die Punkte  $x$  von  $\mathfrak{C}_n$  dadurch charakterisiert, daß für sie wenigstens eine der Ungleichungen

$$|f_{n+1}(x)|, |f_{n+2}(x)|, \dots \geq \varepsilon$$

besteht. Das Maß  $C_n$  von  $\mathfrak{C}_n$  genügt der Ungleichung

$$(22) \quad C_n \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \int_0^1 |f_\nu(x)|^2 dx = \frac{J_n}{\varepsilon^2}.$$

Von den Mengen  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \dots$  enthält jede die folgende ganz in sich. Ihr gemeinsamer Bestandteil  $\lim_{n=\infty} \mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}$  hat, da  $\lim_{n=\infty} J_n = 0$  ist, zufolge

(22) das Maß 0. Für jeden Punkt  $x$  der Komplementärmenge gibt es einen Index, von dem ab alle  $|f_n(x)|$  kleiner als  $\varepsilon$  sind. Für ein solches  $x$  ist also

$$\limsup_{n=\infty} |f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Indem man für  $\varepsilon$  der Reihe nach etwa  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  setzt, gelangt man zum Beweis des Lemmas.

\*) Auf Grund dieses selben Lemmas habe ich früher das sog. Riesz-Fischersche Theorem bewiesen. Math. Ann. 67 (1909), S. 243f.

Wir betrachten hier die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n e(l_h x).$$

Für diese haben wir

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \frac{1}{n^2} \sum_{h,k=1}^n \int_0^1 e(l_h x - l_k x) dx = \frac{1}{n}.$$

Die direkte Anwendung unseres Lemmas ist wegen der Divergenz der harmonischen Reihe  $\sum \frac{1}{n}$  unmöglich. Wählen wir aber aus den ganzen Zahlen  $n$  die Quadratzahlen aus, so kommt

$$\lim_{n=\infty} f_{n^2}(x) = 0$$

außer für solche Werte  $x$ , die einer gewissen Menge  $\mathfrak{A}$  vom Maße 0 angehören. Ist  $n$  eine beliebige ganze Zahl, so bestimme man die ganze Zahl  $\nu$  mittels der Bedingung:

$$\nu^2 \leq n < (\nu + 1)^2.$$

Dann ist

$$|n f_n(x) - \nu^2 f_{\nu^2}(x)| \leq 2\nu, \quad \left| f_n(x) - \frac{\nu^2}{n} f_{\nu^2}(x) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{n}},$$

also wird für alle nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehörigen  $x$  auch

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0.$$

Gehört weder  $x$  noch  $2x$  noch  $3x, \dots$  zu der (mit der Periode 1 sich wiederholenden) Menge  $\mathfrak{A}$ , so ist

$$\lim_{n=\infty} f_n(mx) = 0$$

für jede ganze Zahl  $m \neq 0$ . Für eine solche Zahl  $x$  genügen die Größen

$$l_1 x, l_2 x, l_3 x, \dots$$

mod. 1 dem Gesetz der gleichmäßig dichten Verteilung.

Setzen wir mit Bezug auf die ganzen Zahlen  $l_n$  nur voraus, daß

$$l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots$$

ist, so kommt

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \frac{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_m^2}{n^2},$$

wenn von den Zahlen  $l_1, l_2, \dots, l_n$  die ersten  $h_1$  untereinander gleich sind, dann die darauf folgenden  $h_2$ , usw., und schließlich die letzten  $h_m$ .

miteinander übereinstimmen. Bezeichnet  $h^{(n)}$  die größte unter den Zahlen  $h_1, h_2, \dots, h_m$ , so ist

$$h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_m^2 \leq h^{(n)}(h_1 + h_2 + \dots + h_m) = h^{(n)} \cdot n,$$

also

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx \leq \frac{h^{(n)}}{n}.$$

Die frühere Annahme  $h^{(n)} = 1$  ersetze ich jetzt durch die viel allgemeinere, daß zwei positive Zahlen  $\varepsilon$  und  $c$  existieren sollen, so daß

$$h^{(n)} \leq \frac{c \cdot n}{(\lg n)^{1+\varepsilon}}$$

ist. Dann ist unsere obige Schlußweise immer noch anwendbar. Wir wählen aus der Reihe der ganzen Zahlen  $n$  etwa diese aus:

$$n_\nu = [e^{\nu^{1-b}}], \quad b = \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

und haben

$$\int_0^1 |f_{n_\nu}(x)|^2 dx \leq \frac{c}{\nu^{1+b}}.$$

Folglich ist, abgesehen von Werten  $x$  im Intervall  $0,1$ , die einer Ausnahmemenge  $\mathfrak{A}$  vom Maße  $0$  angehören,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{n_\nu}(x) = 0.$$

Ist  $n$  eine beliebige ganze Zahl, so bestimmen wir  $\nu$  durch die Bedingung

$$n_\nu \leq n < n_{\nu+1}$$

und finden

$$\left| f_n(x) - \frac{n_\nu}{n} f_{n_\nu}(x) \right| \leq \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n} \leq \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} - 1.$$

Da

$$(\nu + 1)^{1-b} - \nu^{1-b} < \nu^{-b} \quad (0 < b < 1)$$

ist, gilt

$$\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} - 1 < e^{\nu^{-b}} - 1, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} - 1 \right\} = 0.$$

Mithin ist außer in  $\mathfrak{A}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Im gegenwärtigen Fall gilt demnach wiederum das Gesetz der gleichmäßigen Verteilung für „fast alle“  $x$ .

Indem wir  $x$  durch  $\frac{x}{m}$  ( $m$  eine ganze positive Zahl) ersetzen, gehen wir zu dem Fall über, in welchem die  $l_n$  gebrochene Zahlen mit einem gemeinsamen endlichen Generalnenner  $m$  sind.

Endlich sei

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

irgend eine ins Unendliche wachsende Folge reeller Zahlen; wir nehmen an, daß das Wachstum von  $\lambda$  als Funktion des Index nicht all zu schwach ist, daß nämlich zwei positive Zahlen  $\varepsilon$  und  $c$  von folgender Art existieren: wächst der Index von  $n$  ab um  $\frac{n}{(\lg n)^{1+\varepsilon}}$ , so hat  $\lambda$  mindestens um  $c$  zugenommen. Die reelle Veränderliche  $x$  beschränken wir auf irgend ein endliches Intervall  $|x| \leq A$ . Wir wählen eine willkürliche ganze positive Zahl  $m$  und ordnen jedem  $\lambda_n$  denjenigen Bruch  $l_n$  mit dem Nenner  $m$  zu, der sich von  $\lambda_n$  um höchstens  $\frac{1}{2m}$  unterscheidet. Unter den  $n$  ersten Zahlen  $l_n$  läßt sich dann gewiß keine Gruppe von mehr als  $\frac{n}{(\lg n)^{1+\varepsilon}}$  untereinander gleichen herausfinden (sobald  $m > \frac{1}{c}$ ). Folglich ist für alle  $x$  bis auf eine Menge  $\mathfrak{A}_m$  vom Maße 0:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n e(l_h x) = 0.$$

Da

$$|e(x_1) - e(x_2)| \leq 2\pi |x_1 - x_2|$$

ist, gilt

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n e(\lambda_h x) - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n e(l_h x) \right| \leq \frac{A\pi}{m},$$

also für alle nicht in  $\mathfrak{A}_m$  gelegenen Werte  $x$ :

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{h=1}^n e(\lambda_h x) \right| \leq \frac{A\pi}{m}.$$

Bilden wir die Menge  $\mathfrak{A}$ , zu welcher ein Punkt  $x$  im Intervall  $-A \dots + A$  dann und nur dann gehört, falls er in *allen* Mengen  $\mathfrak{A}_m$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ), endlich viele ausgenommen, angetroffen wird, so hat  $\mathfrak{A}$  das Maß 0, und für alle nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehörigen Werte  $x$  besteht die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n e(\lambda_h x) = 0.$$

Damit ist bewiesen:

*Satz 21. Es sei  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  irgend eine Folge reeller Zahlen; sei  $\lambda$  als Funktion des Index mögen zwei positive Konstanten  $\varepsilon$  und  $c$  derart existieren, daß jedesmal, wenn der Index von  $n$  ab um mehr als  $\frac{n}{(\lg n)^{1+\varepsilon}}$*

wächst,  $\lambda$  um wenigstens  $c$  zugenommen hat. Ist  $x$  dann eine reelle Zahl, die nicht einer gewissen Ausnahmemenge vom Maße 0 angehört, so liegt die Reihe der Größen

$$\lambda_1 x, \lambda_2 x, \lambda_3 x, \dots$$

mod. 1 überall gleich dicht.\*)

### § 8.

#### Anhang. Über geschlossene Euklidische Räume.

Unter einem geschlossenen Euklidischen Raum verstanden wir eine geschlossene  $p$ -dimensionale Mannigfaltigkeit\*\*) von der Beschaffenheit, daß in der Umgebung jedes Punktes die Euklidische Geometrie gilt.

Es sei im gewöhnlichen  $p$ -dimensionalen Raum, in welchem jedes System reeller Zahlen  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  einen Punkt bedeutet, eine diskontinuierliche Gruppe  $\Gamma$  Euklidischer Bewegungen gegeben;  $\Gamma$  besitze einen endlichen Fundamentalbereich und enthalte keine reinen Drehungen. Faßt man jedes System hinsichtlich  $\Gamma$  äquivalenter Punkte des gewöhnlichen Raumes als einen einzigen „Punkt“ einer neuen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{R}_\Gamma$  auf, so ist  $\mathfrak{R}_\Gamma$  in unserm Sinne offenbar ein geschlossener Euklidischer Raum; ich bezeichne ihn als einen (als den zu der Gruppe  $\Gamma$  gehörigen) *Kristall*. Wir wollen in diesem Anhang beweisen:

Satz 22. *Jeder geschlossene Euklidische Raum ist ein Kristall.*

Nach einem allgemeinen von Bieberbach bewiesenen Satze\*\*\*) enthält

\*) Für den Fall  $\lambda_n = a^n$  ( $a$  eine ganze positive Zahl) wurde dies, in noch wesentlich schärferer Form, von den Herren Hardy und Littlewood bewiesen, Act. Math. 37, S. 183 ff. Die allgemeine Frage ist, unabhängig von mir, von Herrn Towler, einem Schüler der Herren Hardy und Littlewood, in den Londoner Proceedings weiter verfolgt worden.

\*\*) Betreffs der in diesem Anhang verwendeten Analysis-situs-Begriffe muß ich auf mein Buch „Die Idee der Riemannschen Fläche“ (namentlich § 4 und § 9) verweisen. Ich benutze die Gelegenheit, um an dem Inhalt des § 4 dieses Buches zwei kleine Korrekturen vorzunehmen: 1) Bei der Definition des Begriffs der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ist (worauf ich durch freundliche Mitteilung des Herrn O. Veblen aufmerksam gemacht wurde) vergessen, die hernach immerfort benutzte Tatsache: „Zu irgend zwei Umgebungen eines Punktes existiert stets eine Umgebung, welche in beiden enthalten ist“ ausdrücklich als Forderung auszusprechen. 2) Die Behauptungen auf S. 19 über das stetige Abbild einer abgeschlossenen Menge sind zu beschränken auf „ganz im Endlichen gelegene“ Mengen; die Eigenschaft einer Menge  $\mathfrak{E}$ , ganz im Endlichen zu liegen, läßt sich kaum anders beschreiben als durch die Aussage, daß jede aus unendlichvielen Punkten bestehende Teilmenge von  $\mathfrak{E}$  eine Verdichtungsstelle besitzen soll. — Betreffs des Zusammenhanges des Problems der Nicht-euklidischen Raumformen mit der Riemannschen Funktionentheorie vgl. P. Koebe, Annali di Matematica Ser. III, 21 (Lagrange-Festband), S. 57 ff.

\*\*\*) Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume, Math. Ann. 70 (1911), S. 333. Vgl. auch Frobenius, Ber. d. K. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1911, S. 668.

jede Bewegungsgruppe  $\Gamma$  von der oben geforderten Art  $p$  unabhängige Translationen, aus denen sich alle in  $\Gamma$  enthaltenen Translationen zusammensetzen lassen. Sorgt man durch affine Transformation der Koordinaten  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  dafür, daß dies die Translationen

$$(1, 0, \dots, 0); (0, 1, \dots, 0); \dots; (0, 0, \dots, 1)$$

sind, so werden Punkte  $x$ , die im  $\mathfrak{R}_p$  zusammenfallen, auch in  $\mathfrak{R}_\Gamma$  identisch: im  $\mathfrak{R}_p$  wird  $\Gamma$  zu einer aus endlich vielen linearen ganzzahligen unimodularen Transformationen bestehenden Gruppe\*)  $\Gamma_0$ , und man kann  $\mathfrak{R}_\Gamma$  dadurch aus  $\mathfrak{R}_p$  erzeugen, daß man immer diejenigen endlich vielen Punkte, welche hinsichtlich  $\Gamma_0$  äquivalent sind, an eine Stelle zusammenfallen läßt. Das ist die Behauptung, die wir in § 2 aufgestellt haben.

Um aber zu erkennen, daß jeder geschlossene Euklidische Raum  $\mathfrak{R}$  ein Kristall ist, verfahren wir so: Ist  $p$  irgend ein Punkt von  $\mathfrak{R}$ , so ist für hinreichend kleine  $r$  das Innere der Kugel um  $p$  vom Radius  $r$  (d. i. die Gesamtheit derjenigen Punkte, die mit  $p$  durch geradlinige Strecken verbunden werden können, deren Länge  $< r$  ist,) eine Umgebung von  $p$ , die sich umkehrbar eindeutig und kongruent abbilden läßt auf das Innere einer Kugel im gewöhnlichen Euklidischen Raum vom Radius  $r$ . Für beliebig große  $r$  jedoch kann das nicht der Fall sein, weil  $\mathfrak{R}$  ein geschlossener Raum ist. Es gibt demnach eine bestimmte positive Zahl  $r(p)$ , welche diejenigen  $r (\leq r(p))$ , für welche eine solche Abbildung möglich ist, scheidet von denen, für die das nicht der Fall ist.  $r(p)$  ist als Funktion des Punktes  $p$  stetig. Sobald nämlich  $q$  in hinreichender Nähe des Punktes  $p$  liegt, ist offenbar  $|r(q) - r(p)|$  höchstens gleich der gegenseitigen Entfernung der beiden Punkte  $p, q$ . Mithin hat  $r(p)$  (als stetige positive Funktion auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit) ein positives Minimum  $r_0$ . Damit ist gezeigt: Im Innern einer Kugel vom Radius  $r_0$  in  $\mathfrak{R}$  gilt immer die Euklidische Geometrie, wo auch der Mittelpunkt der Kugel gelegen sein mag. Insbesondere ergibt sich daraus, daß jede der beiden Hälften, in die eine gerade Linie in  $\mathfrak{R}$  durch einen ihrer Punkte zerfällt, eine unendliche Länge besitzt (was natürlich nicht ausschließt, daß sie eine geschlossene, unendlich oft durchlaufene Kurve ist). Denn sind wir bei Durchlaufung der Geraden bis zu einem bestimmten Punkte gelangt, so geht die Gerade von dort aus in der betreffenden Richtung noch mindestens um ein Stück von der Länge  $r_0$  weiter.

Wir wählen jetzt einen festen Punkt  $p_0$  in  $\mathfrak{R}$  und in ihm ein geradliniges rechtwinkliges Koordinatenkreuz. Ist  $\gamma$  eine beliebige von  $p_0$  ausgehende, in  $p$  endigende Kurve in  $\mathfrak{R}$ , so können wir dieses Achsenkreuz

\*) Die Gruppe  $T$  der in  $\Gamma$  enthaltenen Translationen ist eine invariante Untergruppe von  $\Gamma$ . In der Symbolik der Gruppentheorie ist  $\Gamma_0 = \Gamma : T$ .

mit seinem Nullpunkt so auf  $\gamma$  entlang schieben, daß sich die Achsen beständig parallel bleiben. Die nach diesen Achsen genommenen Komponenten der gesamten Translation, die dabei der Nullpunkt erfährt, während er von  $p_0$  nach  $p$  gleitet, die „Translationskomponenten längs  $\gamma$ “, seien  $x_1, x_2, \dots, x_p$ . (Sie brauchen keineswegs  $= 0$  zu sein, wenn die Kurve  $\gamma$  zum Ausgangspunkte zurückkehrt.) Ich sage: jede von  $p_0$  ausgehende Kurve  $\gamma$  definiert einen „Punkt“  $\bar{p}$  der neuen Mannigfaltigkeit  $\bar{\mathfrak{R}}$ , der „über dem Endpunkte  $p$  von  $\gamma$  liegt“; und zwar sollen zwei verschiedene Kurven  $\gamma, \gamma'$ , die von  $p_0$  ausgehen und in demselben Punkte  $p$  enden, nur dann den gleichen Punkt  $\bar{p}$  über  $p$  definieren, wenn die Translationskomponenten längs  $\gamma$  den gleichen Wert haben wie die längs  $\gamma'$ . Ist  $\bar{p}$  ein durch  $\gamma$  definierter, über  $p$  gelegener Punkt und  $K$  das Innere einer Kugel um  $p$  als Mittelpunkt, deren Radius  $\leq r_0$  ist, so hänge ich an  $\gamma$  alle möglichen von  $p$  ausgehenden, in  $K$  verlaufenden Kurven  $\gamma_1$  an; die durch die sämtlichen so entstehenden Kurvenzüge  $\gamma + \gamma_1$  definierten Punkte sollen eine „Umgebung“  $\bar{K}$  von  $\bar{p}$  bilden. Da laut dieser Festsetzung über jedem Punkte von  $K$  nur ein einziger Punkt von  $\bar{K}$  liegt, so haben wir damit einen unverzweigten Überlagerungsraum  $\bar{\mathfrak{R}}$  über  $\mathfrak{R}$  konstruiert. Dieser Überlagerungsraum ist „regulär“; d. h. von zwei Kurven in  $\bar{\mathfrak{R}}$ , die im Grundraum  $\mathfrak{R}$  die gleiche „Spurkurve“ besitzen, kommt es niemals vor, daß die eine offen, die andere geschlossen ist. Sind daher  $\bar{p}_1, \bar{p}_1'$  zwei Punkte in  $\bar{\mathfrak{R}}$ , die „sich decken“, d. h. über demselben Punkte  $p_1$  von  $\mathfrak{R}$  liegen, so gibt es eine einzige umkehrbar eindeutige stetige Abbildung von  $\bar{\mathfrak{R}}$  in sich, bei der jeder Punkt von  $\bar{\mathfrak{R}}$  in einen ihn deckenden übergeht („Decktransformation“),  $\bar{p}_1$  aber insbesondere in  $\bar{p}_1'$ . Die Decktransformationen bilden eine diskontinuierliche Gruppe  $\Gamma_{\bar{\mathfrak{R}}}$ . Die Längenmessung überträgt sich von  $\mathfrak{R}$  auf  $\bar{\mathfrak{R}}$ ; die Decktransformationen sind kongruente Abbildungen von  $\bar{\mathfrak{R}}$  in sich.

Jedem Punkte  $\bar{p}$  in  $\bar{\mathfrak{R}}$  entsprechen eindeutig  $p$  Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , nämlich die Translationskomponenten längs derjenigen Kurve, welche  $\bar{p}$  definierte, und damit ein Punkt  $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  im Euklidischen Raum  $R$  mit den rechtwinkligen Koordinaten  $x_i$ . Die Abbildung  $\bar{p} \rightarrow (x)$  ist eindeutig, stetig, längentreu. Wir wechseln die Auffassung, indem wir nunmehr übereinkommen,  $\bar{p}$  als einen über dem Punkte  $(x)$  von  $R$  gelegenen Punkt zu betrachten. Dadurch verwandelt sich  $\bar{\mathfrak{R}}$  in einen unverzweigten Überlagerungsraum über  $R$ . Derselbe ist unbegrenzt. Über dem Nullpunkte in  $R$  liegt nämlich gewiß ein Punkt  $\bar{p}_0$  von  $\bar{\mathfrak{R}}$ . Wir ziehen vom Nullpunkte aus eine beliebige Halbgerade  $g$  in  $R$  und verfolgen auf  $\bar{\mathfrak{R}}$  einen stetig veränderlichen Punkt  $\bar{p}$ , der von  $\bar{p}_0$  ausgeht und dessen

Spurpunkt in  $R$  diese Gerade durchläuft (Weierstraß' Prinzip der analytischen Fortsetzung); dadurch erhalten wir eine eindeutig bestimmte Kurve  $\bar{\gamma}$  auf  $\bar{\mathfrak{R}}$  über  $g$ . Es ist unmöglich, daß man auf  $\bar{\mathfrak{R}}$  gegen einen „kritischen Punkt“, eine „Grenze“ läuft; denn von jedem Punkte aus, zu dem man gelangt ist, kann man auf  $g$  noch mindestens um ein Stück von der Länge  $r_0$  weiter fortschreiten. Da mithin  $\bar{\mathfrak{R}}$  relativ zu  $R$  unverzweigt und unbegrenzt ist und der gewöhnliche Euklidische Raum einfachen Zusammenhang besitzt, muß  $\bar{\mathfrak{R}}$  überall genau einblättrig über  $R$  sich hinziehen, d. h.  $\bar{\mathfrak{R}}$  ist durch die Beziehung  $\bar{p} \rightarrow (x)$  umkehrbar eindeutig und kongruent auf den Euklidischen Raum  $R$  abgebildet. Vermöge dieser Abbildung erscheint die Gruppe  $\Gamma_{\bar{\mathfrak{R}}}$  der Decktransformationen von  $\bar{\mathfrak{R}}$  (relativ zu  $\mathfrak{R}$ ) als eine diskontinuierliche Bewegungsgruppe  $\Gamma$  in  $R$ , und  $\mathfrak{R}$  selber ist umkehrbar eindeutig, stetig und längentreu auf den Kristall  $\mathfrak{R}_r$  abgebildet. Wenn  $\mathfrak{R}$  geschlossen ist, muß dies auch von  $\mathfrak{R}_r$  gelten, d. h. die Gruppe  $\Gamma$  muß einen endlichen Fundamentalbereich besitzen. Damit ist unser Beweis zu Ende geführt.

Zürich, den 13. Juli 1914.