Die Funktion $f(x) = \int_0^\infty e^{-v}(v+\delta)^x dv$ ist 1 für $x = 0$, $1+\delta$ für $x = 1$, und dazwischen konvex; denn die Derivierte

$$\int_0^\infty e^{-v}(v+\delta)^x \log(v+\delta)\, dv$$

nimmt mit wachsendem x ständig zu: da, wo $\log(v+\delta) > 0$ ist, wächst $(v+\delta)^x$ mit x zugleich; wo $\log(v+\delta) < 0$ ist, nimmt $(v+\delta)^x$ mit wachsendem x ab. Daher ist

$$\int_0^\infty e^{-v}(v+\delta)^{\lambda-\frac{1}{2}} dv \leqq 1 + (\lambda - \tfrac{1}{2})\delta;$$

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}(t+1)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt = \delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-v}(v+\delta)^{\lambda-\frac{1}{2}} dv$$
$$\leqq \delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} + 0{,}026\,\delta^{-\lambda+\frac{1}{2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}t}(t+1)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt \leqq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} + 0{,}026\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} < 0{,}66.$$

Ferner

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}(t+1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \log(t+1)\, dt$$
$$= \delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-v}(v+\delta)^{\lambda-\frac{1}{2}} \log(v+\delta)\, dv$$
$$+ \delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} \log\frac{1}{\delta} \int_0^\infty e^{-v}(v+\delta)^{\lambda-\frac{1}{2}} dv$$
$$\leqq \delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-v} \frac{v+\delta}{e(\frac{3}{2}-\lambda)} dv + \delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} \left|\log\frac{1}{\delta}\right| (1 + (\lambda-\tfrac{1}{2})\delta)$$
$$< 0{,}38\,(\delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} + \delta^{-\lambda+\frac{1}{2}}) + \left|\log\frac{1}{\delta}\right| (\delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} + 0{,}026\,\delta^{-\lambda+\frac{1}{2}});$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}t}(t+1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \log(t+1)\, dt$$
$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-v}\left(v+\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} \log\left(v+\frac{\pi}{2}\right) dv$$
$$- \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \log\frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-v}\left(v+\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} dv$$

$$< \frac{1}{e(\frac{3}{2}-\lambda)} \left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \log\frac{\pi}{2} < 0{,}33.$$

Setzt man diese Werte oben ein, so kommt

$$\left| \int_{(\lambda)} y^{-s}\, \Gamma(s)\, N(s,\chi)\, ds \right|$$
$$< A(\lambda)\sqrt{2\pi}\,(752 \log k + 10400)\,|y|^{-\lambda} \{\delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} + 0{,}026\,\delta^{-\lambda+\frac{1}{2}} + 0{,}66\}$$
$$+ A(\lambda)\sqrt{2\pi}\, 752\, |y|^{-\lambda} \Big\{0{,}38\,(\delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} + \delta^{-\lambda+\frac{1}{2}})$$
$$+ \left|\log\frac{1}{\delta}\right| (\delta^{-\lambda-\frac{1}{2}} + 0{,}026\,\delta^{-\lambda+\frac{1}{2}}) + 0{,}33\Big\}.$$

$$\delta^{-1} < \frac{n}{\sqrt{\pi}}\,|y|;$$

$$|\Phi| < \frac{A(\lambda)}{\sqrt{2\pi}} (752 \log k + 10400)\, k^{\frac{1}{2}} \Big\{ |y|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}$$
$$+ 0{,}026\,|y|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} + 0{,}66\,|y|^{-\lambda} \Big\}$$
$$+ \frac{A(\lambda)}{\sqrt{2\pi}}\, 752\, k^{\frac{1}{2}} \Big\{ 0{,}38\,|y|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}$$
$$+ 0{,}38\,|y|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} + 0{,}33\,|y|^{-\lambda} \Big\}$$
$$+ \frac{A(\lambda)}{\sqrt{2\pi}}\, 752\, k^{\frac{1}{2}} \Big\{ |y|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} + 0{,}026\,|y|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} \Big\} \left|\log\frac{1}{\delta}\right|$$
$$+ \log k + \log 2.$$

Hierin ist

$$1 \leqq k \leqq B = \sqrt[4]{2\pi}\,\sqrt{n};$$

$$|y| < \sqrt{\frac{\pi}{n^2} + \frac{4\pi^2}{k^2 B^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{n^2} + \frac{4\pi^2}{k^2 n \sqrt{2\pi}}};$$

$$|y|\, k \frac{n}{\sqrt{\pi}} < \sqrt{k^2 + \frac{4\pi n}{\sqrt{2\pi}}} \leqq \sqrt[4]{2\pi}\,\sqrt{3}\; n^{\frac{1}{2}};$$

$$|y|^{-1} \leqq \frac{n}{\sqrt{\pi}}, \quad \left(|y| \frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)^{-1} \leqq 1; \quad \delta^{-1} < \sqrt{1 + \frac{4\pi n}{k^2\sqrt{2\pi}}} \leqq n^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\sqrt{8\pi}};$$

und daher

$$|\Phi| < \frac{1{,}002}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lambda} n^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2\pi}\Big\{(376\log n + 10750)(\sqrt[4]{3}+0{,}026+0{,}66)$$
$$+\,752\,(0{,}38\cdot\sqrt[4]{3}+0{,}38+0{,}33)$$
$$+\,752\,(\sqrt[4]{3}+0{,}026)\left(\tfrac{1}{2}\log n+\tfrac{1}{2}\log(1+\sqrt{8\pi})\right)\Big\}+\tfrac{1}{2}\log n+1{,}2$$
$$< 0{,}373\,n^{\lambda+\frac{1}{4}}\big\{(376\log n+10750)\,2{,}01+752\cdot 1{,}22$$
$$+\,752\cdot 1{,}35\left(\tfrac{1}{2}\log n+0{,}90\right)\big\}+\log n+1{,}2$$
$$< 0{,}373\,n^{\lambda+\frac{1}{4}}\{1270\log n+23500\}+\log n+1{,}2$$
$$< n^{\lambda+\frac{1}{4}}(475\log n+8770).$$

Hilfssatz 9. *Für ungerade n ist*

$$S(n) > 1{,}3. \tag{14}$$

Beweis: Nach der *'Partitio numerorum'*; III, 3. 23 ist

$$S(n) = \prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right),$$

also für ungerade n

$$S(n) = 2\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\nmid n\\ p>2}}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)$$
$$> 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) = 2\prod_{p>2}\frac{(p-2)\,p}{(p-1)(p-1)};$$

vergleicht man dies mit der Formel von Wallis

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)}{2n}\frac{(2n+1)}{2n},$$

so folgt

$$S(n) > 2\,\frac{2}{\pi}\,\frac{8.8}{7.9}\,\frac{14.14}{13.15} > 1{,}3.$$

Beweis der auf S. 7 ausgesprochenen Behauptung.

Wenn wir beachten, daß $B = \sqrt[4]{2\pi}\sqrt{n}$ war, und wenn wir dann aus (14), (7), (8), (13), (12), (6) in die linke Seite von (5) einsetzen, wird diese für jedes ungerade $n > 10^{32}$ größer als

$$\frac{n^2}{2}\,1{,}3-\frac{e^{\sqrt{\pi}}}{2\pi^3}\sqrt{2\pi}\,n\cdot 5{,}7\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{n}-\frac{n^2}{2}\,\frac{11{,}4}{[\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{n}]}$$
$$-\frac{3e^{\sqrt{\pi}}}{4}(475\log n+8770)\,n^{0{,}776}\Big\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,n\log n$$
$$+\frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{4}\log(2\pi)+C+\frac{12}{\pi^2}+10^{-3}\right)\Big\}$$
$$> n^{1{,}776}\Big\{0{,}65\,n^{0{,}224}-\frac{5{,}7}{n^{0{,}276}}-\frac{11{,}4}{2}\,\frac{1}{n^{0{,}276}}$$
$$-\frac{3e^{\sqrt{\pi}}}{4\sqrt{\pi}}(475\log n+8770)\left(\tfrac{3}{2}\log n+2{,}26\right)\Big\}$$
$$> n^{1{,}776}\Big\{0{,}65\,n^{0{,}224}-\frac{11{,}4}{n^{0{,}276}}-1780\log^2 n-35500\log n-49400\Big\},$$

und dies ist für $n > 3{,}6\cdot 10^{32}$ größer als

$$n^{1{,}776}\{12740000-10004000-2662000-50000\} > 0.$$
