Math. Semesterber. (1994) 41:55–67

Mathematische Semesterberichte

Das Goldbach'sche Problem*

Dieter Wolke

Mathematisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Albertstraße 29, D-79104 Freiburg

Eingegangen am 8.11.1993, angenommen am 19.11.1993

Zusammenfassung. Der Autor gibt einen Überblick über die Entwicklung des Goldbach'schen Problems, das heißt die Frage der Darstellbarkeit natürlicher Zahlen als Summe aus zwei bzw. drei Primzahlen, von den Anfängen bis zur Gegenwart.

1. Einleitung

Das berühmte Goldbach'sche Problem hat seinen Namen durch einen Brief, den am 7. Juni 1742 der Jurist, Sekretär der Petersburger Akademie und Hobby-Mathematiker Christian Goldbach (1690–1764) an Leonhard Euler (1707–1783) schrieb. Darin heißt es unter anderem:

„Es scheinet wenigstens, dass jede Zahl, die größer ist als 1, ein aggregatum trium numerorum primorum sey“ (Euler-Goldbach [10]).

Dabei muß man bedenken, daß die Zahl Eins zur Menge der Primzahlen gerechnet wurde. Hier soll nach allgemeinem Brauch unter einer Primzahl p eine natürliche Zahl > 1 mit genau zwei natürlichen Teilern, 1 und p, verstanden werden. Als Goldbach'sches Problem bezeichnet man heute das folgende, über die ursprüngliche Frage hinausgehende Hypothesenpaar

Jede gerade Zahl ≥ 4 ist die Summe zweier Primzahlen (binäres Problem).
Jede ungerade Zahl ≥ 7 ist die Summe dreier Primzahlen (ternäres Problem).

Daß dies mehr beinhaltet als die Goldbach'sche Formulierung, sieht man an zwei Fällen. Wenn eine gerade Zahl $2n$ nach Goldbach eine Zerlegung $2n = p_1 + p_2 + 2$ besitzt, braucht daraus keine binäre Darstellung $2n = p_1' + p_2'$ zu folgen. Analog ist nicht zu sehen, wie aus $2n + 1 = p_1 + p_2 + 1$ auf $2n + 1 = p_1' + p_2' + p_3'$ geschlossen werden kann.

Wegen $2n + 1 = 2(n - 1) + 3$ schließt die binäre Hypothese die ternäre ein.

* Ausarbeitung eines Vortrags an der Universität Hannover im Juni 1993 anläßlich des 40. Doktorjubiläums sowie des 75. Vorlesungssemesters von Prof. Georg Johann Rieger

Euler antwortete am 30. Juni 1742

„Dass aber ein jeder numerus par eine summa duorum primorum sey, halte ich für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstriren kann“.

Dies ist alles, was Euler hierzu geäußert hat. Die Entwicklung bis heute mag als Beleg dafür angesehen werden, daß Euler auch bei intensiver Suche vermutlich keinen Lösungsweg hätte finden können.

Es scheint wenig bekannt zu sein, daß die Goldbach-Frage schon wesentlich früher, bei Descartes (1596–1650) auftaucht. In den Opuscula Posthuma, 1701 veröffentlicht, heißt es (in freier Übersetzung aus dem Lateinischen)

„Was ich jedoch noch nicht bewiesen habe, daß jede gerade Zahl aus einer oder zwei oder drei Primzahlen besteht“.

Trotzdem sei dem ansonsten wissenschaftlich wenig hervorgetretenen Goldbach der Ruhm gegönnt, das Problem in Umlauf gebracht und damit die Patenschaft für eine der großen, im Kern bis heute noch ungelösten zahlentheoretischen Fragen übernommen zu haben.

Bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts gab es keine nennenswerten Lösungsansätze, welche entscheidend über Plausibilitätsbetrachtungen hinausgingen. Es werde im folgenden für $k \geq 2$ mit

$$R_k(N) = \#\{(p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{P}^k\ , \quad p_1 + \ldots + p_k = N\} \tag{1.1}$$

die Anzahl der Zerlegungen von N als Summe aus k Primzahlen bezeichnet. Jedes gerade $N \geq 4$ hat offenbar $N-1$ Darstellungen $N = n_1 + n_2$ $(n_1, n_2 \in \mathbb{N})$. Gemäß dem Primzahlsatz ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Zahl $n \leq N$ zur Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen gehört, nahezu gleich $(\ln N)^{-1}$. Da in einer binären Goldbach-Zerlegung beide Summanden prim sein sollen, liegt es nahe, für gerades N

$$R_2(N) \approx \frac{N}{\ln^2 N}$$

zu vermuten. Durch etwas verfeinerte Überlegungen ähnlicher Art kam Sylvester (James Joseph S.; 1814–1897) 1871 [31] zu der Vermutung, daß für jedes gerade N die asymptotische Formel

$$R_2(N) \sim 2\pi(N) \cdot \prod_{3 \leq p \leq N, p \nmid N} \frac{p-2}{p-1}$$

gilt ($\pi(N)$ = Anzahl der Primzahlen $\leq N$, also nach dem Primzahlsatz $\pi(N) \sim N(\ln N)^{-1}$. $f(N) \sim g(N)$ bedeutet $\lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{g(N)} = 1$). Landau (Edmund L., 1877–1938) [21] stellte 1900 durch Aufsummieren fest, daß diese Formel immer wieder erheblich verletzt sein muß.

In seinem berühmten Vortrag anläßlich des Welt-Mathematikerkongresses 1900 in Paris beschrieb Hilbert (David H., 1862–1943) [18] in seiner Liste von 23 offenen mathematischen Problemen an achter Stelle eine Reihe von Fragen zu den Primzahlen. Unter anderem:

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und paarweise teilerfremd. Ist die lineare Gleichung

$$ax + by + c = 0 \tag{1.2}$$

stets in Primzahlen x und y lösbar? Für $c = N$, $2 \nmid N$, $a = b = -1$ beinhaltet dies das binäre Goldbach-Problem, für $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$ ist (1.2) das – ebenfalls bis heute ungelöste – Primzahl-Zwillingsproblem.

Noch 1912 erklärte Landau [22], einer der damals besten Kenner der Zahlentheorie und Analysis, beide Fragen beim gegenwärtigen Stand der Wissenschaft für völlig unangreifbar. Die Zeit um 1920 brachte in mehrfacher Hinsicht erhebliche Fortschritte, zum einen dank der Weiterentwicklung des klassischen Siebes des Eratosthenes durch Merlin und Brun (die Lebensdaten von Jean Merlin sind mir nicht bekannt. Er ist im ersten Weltkrieg als französischer Soldat gefallen. Viggo B., 1885–1978), zum anderen durch die Entwicklung der sogenannten Kreismethode (Hardy, Littlewood, Ramanujan, Vinogradov; Godefrey Harold H., 1877–1947, John Edensor L., 1885–1977, Srinivasa R., 1885–1920, Ivan Matveevich V., 1891–1983). Da einige der stärksten Ergebnisse, insbesondere die Lösung des ternären Problems 1937 durch Vinogradov, mit Hilfe der Kreismethode erzielt wurden, soll auf diese hier etwas ausführlicher eingegangen werden.

2. Die Kreismethode

In einer wegweisenden Serie von Arbeiten "Some problems of "partitio numerorum"" (1920–1928) entwickelten Hardy und Littlewood eine analytische Methode, die auf vielfältige additive zahlentheoretische Fragen wie Goldbach-, Waring- (Darstellbarkeit eines N als Summe beschränkt vieler k-ter Potenzen) und Partitionsproblem (Anzahl aller additiven Zerlegungen von N in natürliche Summanden) angewandt werden kann. Die Nummern III und V ([14, 15]) befassen sich mit additiven Primzahlproblemen.

Ich versuche, eine knappe Skizze zu geben: Sei für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$

$$F(z) = \sum_{p \in \mathbb{P}} z^p \tag{2.1}$$

die erzeugende Potenzreihe zur Primzahlfolge $\mathbb{P}$. Dann folgt auf Grund der absoluten Konvergenz der Reihe $F(z)$ durch Ausmultiplizieren

$$F^3(z) = \sum_{N \in \mathbb{N}} R_3(N) z^N$$

und hieraus nach Cauchy für jedes r mit $0 < r < 1$

$$\begin{aligned} R_3(N) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} F^3(z) z^{-N-1} dz \\ &= r^{-N} \int_0^1 F^3(re(\vartheta)) e(-N\vartheta) d\vartheta \qquad \left(e(\vartheta) = \mathrm{e}^{2\pi i \vartheta}\right) . \end{aligned}$$

Die entscheidende Idee ist nun, mit r genügend nahe an Eins heranzurücken (bei Hardy und Littlewood wird $r = \exp(-1/N)$ gewählt), und den z-Kreis bzw. das ϑ-Einheitsintervall geeignet in Teile ("arcs") aufzuspalten. Hierbei werden im allgemeinen ϑ-Intervalle um rationale Zahlen a/q mit „kleinem" q ("major arcs") und ϑ-Intervalle ohne solche a/q ("minor arcs") unterschieden. Während man auf den "major arcs" die Potenzreihe $F(re(\vartheta))$ asymptotisch mit Haupt- und Fehlerterm auszuwerten versucht, begnügt man sich auf den "minor arcs" mit einer oberen Abschätzung für $|F(re(\vartheta))|$. In einer nicht zu großen Umgebung von $\vartheta = 0$ wird das Studium von

$F(r) = \sum_p r^p$ reichen. Dies geschieht mit dem gewöhnlichen Primzahlsatz. Ebenso bei

$$F\left(re\left(\frac{1}{2}\right)\right) = r^2 - \sum_{p>2} r^p .$$

Bei $\vartheta = 1/3$ ist

$$F\left(re\left(\frac{1}{3}\right)\right) = r^3 + e(1/3) \sum_{p \equiv 1 \bmod 3} r^p + e(2/3) \sum_{p \equiv 2 \bmod 3} r^p ,$$

d.h. hier werden Kenntnisse über die Verteilung der Primzahlen in den Restklassen $\bmod 3$ nützlich sein. Analog benötigt man zum Studium von $F(re(\vartheta))$ mit ϑ aus einer „kleinen" Umgebung von a/q ($(a,q) = 1$) den Dirichlet'schen Primzahlsatz über die asymptotische Verteilung der Primzahlen in den Restklassen $\bmod q$. Die Auflösung der Kongruenzbedingung $p \equiv a \bmod q$ gelingt mit den von Dirichlet (Lejeune D., 1805–1859) eingeführten und nach ihm benannten Charakteren $\chi \bmod q$. Mit der Orthogonalitätsrelation für die Charaktere folgt (für beliebiges f)

$$\sum_{p \equiv a \bmod q, q \leq x} f(p) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \sum_{p \leq x} f(p)\chi(p) .$$

Die letzten Summen studiert man mit Hilfe der zugeordneten Dirichlet-Reihen, den sog. L-Reihen

$$L(s,\chi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi(n) n^{-s} .$$

Sofern man präzise Aussagen über die Verteilung der Primzahlen in den Restklassen $\bmod q$ benötigt, und das ist hier der Fall, sind gute Kenntnisse über die Verteilung der Nullstellen der $L(s,\chi)$ erforderlich.

Hardy und Littlewood teilten in [14] das ϑ-Einheitsintervall restlos in "major arcs" um rationale a/q mit $q \leq \sqrt{N}$ auf. Wegen des damals noch schwächeren Wissens über die Nullstellen der L-Reihen konnten zwar keine hypothesenfreien Resultate erzielt werden, aber die Methode war vorgezeichnet. Zum ternären Problem lautete das Ergebnis:

Unter der Annahme, daß alle L-Reihen in der Halbebene $\{s = \operatorname{Re} z \geq 3/4\}$ *ohne Nullstellen sind, gilt für ungerades N die asymptotische Formel*

$$R_3(N) \sim \frac{N^2}{2(\ln N)^3} \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right). \tag{2.2}$$

Für ungerades N ist

$$\prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} ,$$

sowie

$$\prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) > 2 .$$

Also bedingt (2.2) insbesondere

$$R_3(N) > 0 \quad \text{für} \quad N \geq N_0\,, \quad N \equiv 1 \bmod 2\,.$$

Die zahlentheoretischen Produkt-Faktoren in (2.2) entstehen durch Aufsummieren der Beiträge der Intervalle um die a/q (Hardy-Littlewood'sche "singular series"). Diese sind durch heuristische Überlegungen wie etwa bei Sylvester kaum zu erahnen.

Das binäre Problem kann völlig analog angegangen werden. Allerdings ist hier die Behandlung der auftretenden Fehlerterme, auch bei Annahme analytischer Hypothesen, wesentlich verwickelter. Daher untersuchten Hardy und Littlewood in [15] nur die Beiträge der Hauptterme und erhielten so die vermutlich richtige Formel

$$(2.3)\quad R_2(N) \sim 2\frac{N}{(\ln N)^2}\prod_{p\geq 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\cdot\prod_{p\geq 3,p|N}\left(1+\frac{1}{p-2}\right) \quad (N \text{ gerade})\,,$$

woraus sich

$$R_2(N) > 0 \quad \text{für} \quad N \geq N_0$$

ergeben würde.

Immerhin konnte, wenn auch hypothetisch, gezeigt werden, daß (2.3) „fast immer" richtig ist.

Unter Annahme der verallgemeinerten Riemann'schen Vermutung (d.h. alle Nullstellen Dirichlet'scher L-Reihen haben einen Realteil $\leq 1/2$) ist die Anzahl der geraden $N \leq x$, für die (2.3) *nicht gilt,*

$$\leq C(\varepsilon)x^{1/2+\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0\,, \quad \textit{beliebig}).$$

Der entscheidende Durchbruch beim ternären Problem gelang 1937 I.M. Vinogradov [35]. Drei Dinge verdienen hierbei hervorgehoben zu werden.

a) Anstelle der unendlichen Potenzreihe $F(z)$ benutzte Vinogradov die endliche Exponentialsumme

$$S(\alpha) = \sum_{p\leq N} e(p\alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

und demzufolge die Darstellung

$$R_3(N) = \int_\lambda^{\lambda+1} S^3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha \quad (\lambda \text{ irgendeine reelle Zahl}).$$

b) Im gleichen Jahr stand der sogenannte *Primzahlsatz* von Siegel-Walfisz zur Verfügung:

$$\pi(x,k,a) = \#\{p \leq x\,,\ p \equiv a(k)\} = \frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{dt}{\ln t} + 0\left(x\,\mathrm{e}^{-c(\ln x)^{1/2}}\right)$$

($x \geq 2$, $(a,k) = 1$, $k \leq (\ln x)^A$, A beliebig, aber fest. 0-Konstante nur von A abhängig. Nach Bachmann-Landau steht $0(g(x))$ für eine Funktion $f(x)$ mit $|f(x)| \leq Cg(x)$ für alle $x \geq 2$. C ist die „0-Konstante"). Hierdurch war es möglich, die Nenner der "major arcs" bis $(\ln N)^A$ zu wählen.

c) Für die bei dieser Einteilung auftretenden "minor arcs" entwickelte Vinogradov eine tiefsinnige, auf elementar-zahlentheoretischen Schlüssen beruhende obere Abschätzung für $|S(\alpha)|$.

Auf die Weise war es erstmals möglich, ohne Hypothese die Hardy-Littlewood'sche Formel (2.1) zu beweisen, also insbesondere den

Satz von Goldbach-Vinogradov (1937). *Jedes hinreichend große ungerade, natürliche N ist darstellbar als Summe dreier Primzahlen.*

Schranken N_0, ab denen die Aussage richtig ist, können mit einigem Zusatzaufwand explizit angegeben werden. Der zur Zeit beste Wert liegt bei

$$N_0 = 3,4 \cdot 10^{43000} \quad \text{(Chen, Ze [4])} .$$

Dies ist eine Zahl weit jenseits aller heutigen numerischen Möglichkeiten. Auch unter Voraussetzung der Riemann'schen Vermutung kann N_0 bislang nicht in numerisch zugängliche Breiten herabgedrückt werden. Nachgeprüft ist die ternäre Aussage bis etwa 10^{10}. Es wird daher der Goldbach-Vinogradov'sche Satz vermutlich noch für einige Zeit mit dem Zusatz „für alle hinreichend großen ungeraden N" zu versehen sein.

Die Vinogradov'sche Beweismethode konnte relativ leicht zum Beweis von „fast alle"-Aussagen modifiziert werden, zum Beispiel:

Die Anzahl der geraden $N \leq x$ mit

$$|R_2(N) - H(N)| \geq \tfrac{1}{2}H(N) \tag{2.4}$$

ist

$$\leq C(A)\frac{x}{(\ln x)^A} \quad \textit{für jedes} \quad A > 0 .$$

($H(N)$ steht für die rechte Seite der asymptotischen Formel (2.3)).

Insbesondere gilt die binäre Goldbach-Hypothese für „fast alle" geraden N (van der Corput [5], Estermann [9], Heilbronn [17], Tschudakov [32]).

Das letzte Ergebnis läßt eine einfache Folgerung zu. Hardy und Littlewood vermuteten 1920 [14], daß es zu jedem $k \geq 3$ unendlich viele Primzahl-k-Tupel gibt, die eine arithmetische Progression bilden, d.h.

$$p_1 < p_2 < \dots p_k \quad \text{und} \quad p_2 - p_1 = \dots = p_k - p_{k-1} .$$

Nach (2.4) haben „fast alle", also mit Sicherheit unendlich viele Zahlen $N = 2p_2$ (p_2 prim) eine Darstellung

$$2p_2 = p_1 + p_3 \quad \text{mit} \quad p_1 < p_2 < p_3 .$$

Solche (p_1, p_2, p_3) sind Primzahltripel in Progression. Für die Tupel-Länge $k \geq 4$ ist die Frage bis heute offen, obwohl viele numerische Beispiele (bis $k = 19$) vorliegen.

Darstellungen des Goldbach-Vinogradov'schen Satzes findet man in zahlreichen Lehrbüchern der analytischen Zahlentheorie. In einigen (Prachar [26], Schwarz [30]) wird die minor-arcs-Abschätzung nach der Originalmethode Vinogradovs ausgeführt, während in neueren Büchern einer einfacher zugänglichen Methode von Vaughan [33] (Davenport [6], Karatsuba [20], Vaughan [34]) der Vorzug gegeben wird. Eine auch dem zahlentheoretischen Laien weitgehend gut verständliche Einführung in die wichtigsten Primzahlprobleme bietet das Buch von Ribenboim [27].

3. Ergebnisse mit Siebmethoden

(3.1) Eines der ersten wichtigen Ergebnisse der Sieb-Theorie, die Brun'sche Abschätzung für die Anzahl der Primzahl-Zwillinge

$$\#\{p \leq x\ ,\ p+2\,\text{prim}\} \leq c_1 x (\ln x)^{-2}$$

(c_1 und die weiteren c_ν positive Konstante), in abgeschwächter Form als

$$\sum_{p,p+2\ \text{prim}} \frac{1}{p} < \infty \quad \text{im Gegensatz zu} \quad \sum_p \frac{1}{p} = \infty$$

bekannt, kann analog auch für die Anzahl der binären Goldbach-Darstellungen hergeleitet werden

$$R_2(N) \leq c_2 N (\ln N)^{-2} \prod_{p|N, p\geq 3} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) \quad (N \geq 4\ ,\ N \equiv 0 \bmod 2)$$

(für eine umfassende Einführung in die moderne Sieb-Theorie s. Halberstam-Richert [12]). Mit dem Primzahlsatz oder auch der schwächeren Tschebytschev-Ungleichung folgt für $x \geq 4$

$$\sum_{N\leq x} R_2(N) \geq \left(\sum_{p\leq x/2} 1\right)^2 \geq c_3 x^2 (\ln x)^{-2}\ .$$

Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung ergibt

$$\#\{N \leq x,\ R_2(N) > 0\} \geq \left(\sum_{N\leq x} R_2(N)\right)^2 \left(\sum_{N\leq x} R_2^2(N)\right)^{-1} \geq c_4 x$$

(denn man rechnet leicht nach, daß $\prod_{p|N,p\geq 3}(1 + \frac{1}{p-2})$ im Mittel beschränkt ist).

Die „Goldbach-Zahlen“, d.h. solche Zahlen, die eine binäre Goldbach-Zerlegung besitzen, erweitert um die Eins, bilden eine Menge von positiver Dichte. Mit dem Satz von Schnirelman (s. z.B. Halberstam-Roth [13]) folgt daraus, daß man alle hinreichend großen, natürlichen Zahlen erhält, wenn man die Primzahlen nur genügend, aber beschränkt oft zueinander addiert. So läßt sich schließlich zeigen, daß es ein k gibt, mit dem jedes $N \geq 2$ als

$$N = p_1 + \ldots + p_r \quad \text{mit} \quad r \leq k$$

dargestellt werden kann. Der beste heutige Wert ist $k = 18$ (Riesel, Vaughan, 1983 [29]).

(3.2) Die andere Möglichkeit, sich über Siebe dem binären Goldbach-Problem zu nähern, geht ebenfalls auf Brun zurück. Durch Sieb-Prozesse werden Zahlen mit kleinen Primfaktoren ausgeschieden, bzw. einen Siebprozeß überdauern Zahlen mit lauter großen, also wenigen Primfaktoren. So konnte Brun zeigen, daß jedes hinreichend große, gerade N eine Darstellung

$$N = N_1 + N_2, \quad N_1 \quad \text{und} \quad N_2 \quad \text{haben haben höchstens neun Primfaktoren}\ ,$$

besitzt. Krönung dieser Entwicklung ist der

Satz von Chen (1966). *Jedes hinreichend große, gerade N läßt sich darstellen als*

$$N = p + P_2 \quad (P_2 \text{ prim } \textit{oder Produkt zweier Primzahlen})\,.$$

Der Satz wird einmal durch hochentwickelte Sieb-Techniken ermöglicht, zum anderen durch den sog. *Mittelwertsatz* von Bombieri-Vinogradov (Bombieri [2], Davenport [6]).

$$\sum_{q \le x^{1/2}(\ln x)^{-B(A)}} \max_{(a,q)=1} \max_{y \le x} \left| \#\{p \le y,\, p \equiv a \bmod q\} - \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^y \frac{dt}{\ln t} \right| \le C(A) \frac{x}{(\ln x)^A}$$

($A > 0$, beliebig; $B(A)$ in Abhängigkeit von A angebbare Konstante). Dieser wichtige Satz, der als Gültigkeit der verallgemeinerten Riemann'schen Vermutung im Mittel interpretiert werden kann, ermöglicht es, im Satz von Chen den einen Summanden prim zu wählen.

4. Einige neuere Ergebnisse

Zu dem Problemkreis „Goldbach" seien aus der Fülle der behandelten Themen – bis heute sind mehr als 500 Arbeiten erschienen – einige besonders bemerkenswerte ausgewählt.

(4.1) *Die Montgomery-Vaughan'sche Ausnahmen-Abschätzung.* Montgomery und Vaughan [23] konnten 1975 das Ausnahmen-Ergebnis von 1937 erheblich verbessern.

$$\begin{aligned} &\#\{N \le x,\; N \equiv 0 \bmod 2,\; N \text{ keine Goldbach-Zahl (d.h. } \ne p_1 + p_2)\} \\ &\quad \le c x^{1-\delta} \quad \text{mit einem} \quad \delta > 0\,. \end{aligned}$$

Nach Chen [3] darf $\delta = 1/25$ gewählt werden. Dies führt in die Richtung der von Hardy-Littlewood unter Annahme der Riemann'schen Vermutung hergeleiteten Abschätzung. Jene ist übrigens bis heute nur unwesentlich verbessert worden. Statt $\le c(\varepsilon) x^{1/2+\varepsilon}$ hat man $\le c x^{1/2} (\ln x)^3$.

Der Satz von Montgomery-Vaughan beruht wieder auf der Hardy-Littlewood-Vinogradov'schen Methode. Dabei kommen einige neuere analytische Hilfsmittel zum Tragen, die kurz vorgestellt werden sollen.

Etwa seit der Jahrhundertwende weiß man, daß eine L-Reihe $L(s, \chi)$ (χ primitiver Charakter $\bmod q$, $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$) im Bereich

$$\sigma \ge 1 - \frac{c}{\ln(q(|\tau| + 2))} \quad (c \text{ eine genügend kleine, positive Konstante})$$

nicht verschwindet. In der Regel! Es können *möglicherweise* Ausnahmen auftreten, sogenannte *Siegel-Nullstellen* β. Diese gehören zu reellen Charakteren, sind einfach und liegen auf der reellen Achse nur wenig links von $s = 1$. Bis jetzt hat man für kein noch so kleines c die Existenz solcher Nullstellen ausschließen können. Falls es welche gibt, liegen die zugehörige Moduln q weit voneinander entfernt. Mit dem Begriff der „Siegel-Nullstelle" kann der für Montgomery-Vaughan entscheidende Gallagher'sche *Dichte-Satz* [11] formuliert werden. Dichte-Sätze sagen grob gesprochen aus, daß mögliche Verletzungen der Riemann'schen Vermutung immer seltener werden, je weiter man mit dem Realteil von 1/2 nach 1 geht. Sei für $\frac{1}{2} \le a \le 1$, $T \ge 2$ und einen Charakter χ $N(\alpha, T, \chi)$ die Anzahl der Nullstellen $\rho = \xi + i\eta$ von $L(s, \chi)$ mit $\xi \ge \alpha$ und $|\eta| \le T$. Dann gilt

$$\sum_{q \le T} \sum_{\chi \bmod q,\ \chi \text{ primitiv}} N(\alpha, T, \chi) \le$$

$$\le c_1 \begin{cases} T^{c_2(1-\alpha)}, & \text{falls keine Siegel-Nullstelle mit Modul} \le T \text{ existiert} \\ (1-\tilde{\beta}) \ln T \cdot T^{c_2(1-\alpha)}, & \text{falls } \tilde{\beta} \text{ eine solche Ausnahme-Nullstelle ist.} \end{cases}$$

Dies ist das entscheidende Hilfsmittel. Der Weg bis zur Ausnahmen-Abschätzung ist jedoch noch sehr mühsam.

(4.2) *Das lokalisierte ternäre Problem.* Ist für hinreichend großes, ungerades N

$$(*) \quad N = p_1 + p_2 + p_3 \quad \text{mit} \quad p_j \sim \tfrac{1}{3}N$$

lösbar? Unter Verwendung von Dichte-Sätzen kann gezeigt werden, daß in (*)

$$p_j = \tfrac{1}{3}N + 0(N^{5/8+\varepsilon})$$

(Zhan [38]) möglich ist.

(4.3) *Verteilung der Goldbach-Zahlen.* In jedem Intervall der Art $(x, x + x^{1/2+\varepsilon}]$ sind fast alle geraden Zahlen Goldbach-Zahlen (Perelli-Pintz [24]). Zwischen N und $N^{7/72+\varepsilon}$ liegt immer eine Goldbach-Zahl (Montgomery-Vaughan [23]). Anschaulich gesprochen: Selbst wenn die binäre Vermutung falsch ist, kann es keine „langen" Intervalle mit „vielen" Nicht-Goldbach-Zahlen, bzw. „lange" Blöcke aus Nicht-Goldbach-Zahlen geben. Auch hierzu verwendet man die Kreismethode und Dichte-Sätze.

(4.4) *Das ternäre Problem mit Teilmengen von* $\mathbb{P}$. Wie „dünn" darf man $\mathbb{P}' \subsetneq \mathbb{P}$ wählen, damit für $N \equiv 1 \bmod 2$, $N \ge N_0$

$$N = p_1' + p_2' + p_3' \,; \quad p_j' \in \mathbb{P}'$$

lösbar ist?

Mit analytischen Methoden konnte ich [37] solche Mengen konstruieren, für die

$$P'(x) = \#\{p' \le x,\ p' \in \mathbb{P}'\} \le cx^{15/16}$$

gilt. Unter Mitverwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Hilfsmittel zeigte Wirsing [36], daß es solche $\mathbb{P}'$ mit

$$P'(x) \le cx^{1/3}(\ln x)^{1/3}$$

gibt. Bis auf den Faktor $(\ln x)^{1/3}$ ist dies optimal. Das Wirsing'sche Ergebnis läßt sich auch elementar-kombinatorisch herleiten, aber keine der Methoden liefert ein Konstruktionsverfahren, sondern sichert nur die Existenz solcher Mengen.

(4.5) *Das Heath-Brown'sche hypothetische Ergebnis.* Eine Frage, die sich rasch aufdrängt: Gibt es plausibel erscheinende analytische oder sonstige Hypothesen, aus denen die Richtigkeit der binären Goldbach-Vermutung folgt? Das einzige, sehr tiefe Ergebnis hierzu stammt von Heath-Brown [16]. Angenommen, es existiere zu einem reellen, primitiven Charakter $\chi \bmod q$ eine Siegel'sche Ausnahme-Nullstelle. Dann ist das binäre Problem für $q^{250} < N \leq q^{500}$ lösbar. Hierbei gehen etliche Errungenschaften der neueren analytischen Zahlentheorie ein: Siebmethoden, analytische Nullstellenergebnisse, Abschätzungen für Kloosterman-Summen. Die Aussage ist fast paradox. Man nimmt an und hofft es auch, daß keine Siegel-Nullstellen existieren. Insbesondere schließt die Richtigkeit der Riemann'schen Vermutung für die L-Reihen die Existenz solcher Nullstellen aus. Falls diese unerwünschten Subjekte auftreten, haben sie nach Heath-Brown positive Wirkung. Man kann dieses Ergebnis auch anders herum deuten: Wer sich in Zukunft um die binäre Goldbach-Vermutung bemüht, darf davon ausgehen, daß keine Siegel-Nullstellen existieren.

(4.6) *Lineare Gleichungen in Primzahlen.* Die Hilbert'sche lineare Gleichung (1.2.) in Primzahlen kann nach Belieben verallgemeinert und im Schwierigkeitsgrad angehoben werden. Prachar [25] und Rieger [28] befaßten sich mit der Lösbarkeit des Systems

$$p_1 + p_2 = n\,, \quad p_2 + p_3 = m$$

in Primzahlen p_1, p_2, p_3. Rieger konnte zeigen, daß die Menge der Paare (m, n) mit Lösbarkeit innerhalb der Menge aller Paare positive Dichte besitzt. In einer wichtigen Arbeit, in der Matrizenrechnung und Mittelwertsätze von Bombieri-Vinogradov'schem Typ benutzt werden, konnte Balog [1] unlängst zeigen, daß gewisse homogene, lineare Gleichungssysteme in Primzahlen lösbar sind. Zum Beispiel gibt es unendlich viele „Primzahldreiecke"

$$\begin{array}{ccc} & p_1 & \\ p_2 & & p_3 \end{array} \qquad \text{mit primen „Seitenhalbierenden"} \quad \frac{p_1+p_2}{2}, \frac{p_1+p_3}{2}, \frac{p_2+p_3}{2}\,,$$

z.B. $p_1 = 5$, $p_2 = 17$, $p_3 = 521$.

Leider fällt das binäre Goldbach-, das Zwillings-, das Hardy-Littlewood'sche Progressionenproblem und erst recht das Prachar-Rieger'sche System nicht in die Balog'sche Klasse von Gleichungen, aber ein wichtiger Anfangsschritt ist getan.

5. Offene Fragen

Neben der alle anderen in den Schatten stellenden Frage, dem binären Goldbach-Problem für alle oder zumindest alle hinreichend großen geraden N, gibt es eine Reihe von vielleicht weniger schwierigen, aber reizvollen Problemen, von denen ich einige vorstellen will.

(5.1) Gesucht sind gute numerische Verfahren zum Nachprüfen des ternären Problems. Wie gesagt ist das noch ausstehende Intervall etwa gleich $(10^{10}, 10^{43000})$. Eine Möglichkeit, nach Zerlegungen zu suchen, ist, mit einem großen, einem kleinen und einem sehr kleinen Summanden zu arbeiten. Unter Annahme der verallgemeinerten Riemann'schen Vermutung kann man zeigen, daß für fast alle ungeraden N Darstellungen

$$N = p_1 + p_2 + p_3\,, \quad p_2 = 0((\ln N)^c)\,, \quad p_3 = 0((\ln \ln N)^c)$$

existieren. Trotzdem dürfte es schwierig sein, Algorithmen zu finden, die relativ rasch ganze Intervalle von Zahlen oder spezielle Teilmengen erfassen.

(5.2) Paul Erdös, der auf zahlreiche Probleme Dollar-Belohnungen aussetzt, bietet 3000 Dollar für den Beweis oder die Widerlegung der Vermutung, daß eine Menge

$\mathbf{A} \subseteq \mathbb{N}$, welche keine Progressionen beliebiger Länge enthält, konvergente Reziprokensumme hat

$$\sum_{a \in \mathbf{A}} a^{-1} < \infty\,, \quad \text{falls es ein } k \geq 3 \text{ gibt, so daß } A \text{ keine } k\text{-gliedrige arithmetische Progression enthält.}$$

Da $\sum p^{-1}$ nach Euler divergiert, müßte die Erdös-Vermutung auf $\mathbf{A} = \mathbb{P}$ zutreffen. Die ausgesetzte Belohnung zu verdienen, dürfte nicht leicht sein, da, wie oben geschildert, schon der Fall $k = 4$ ungeklärt ist.

(5.3) Ein anderes Erdös-Problem, dessen Lösung ebenfalls zur Aufbesserung der Semesterkasse begabter Zahlentheorie-Studenten beitragen könnte, ist das folgende: Nach Erdös [8] (s. auch Halberstam-Roth [13]) läßt sich wahrscheinlichkeitstheoretisch oder auch elementar-kombinatorisch zeigen, daß $\mathbb{P}$ eine „Komplementärmenge" $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{N}$ von geringer Dichte besitzt.

$$\mathbb{P} + \mathbf{A} = \{N \in \mathbb{N},\ N = p + a,\ p \in \mathbb{P},\ a \in \mathbf{A}\} \supseteq \{N \geq N_0\} \text{ für ein } N_0 \in \mathbb{N}\,,$$
$$A(x) = \#\{a \in \mathbf{A},\ a \leq x\} = 0(\ln^2 x)\,.$$

Es läßt sich weiter zeigen, daß jedes $N \geq N_0$ mehr als $c \ln N$ Darstellungen $N = p + a$ hat. Frage: Kann man die Schranke $0(\ln^2 x)$ verkleinern, eventuell bis hinunter zu $0(\ln x)$?

(5.4) Ist die Menge $\mathbb{P}$ additiv reduzibel, d.h. gibt es Mengen $\mathbf{A}, \mathbb{B}, \subseteq \mathbb{N}$ mit mindestens je zwei Elementen, so daß für ein $N_0 \in \mathbb{N}$

$$\{N \in \mathbb{N},\ N \geq N_0,\ N = a + b,\ a \in \mathbf{A},\ b \in \mathbb{B}\} = \{p \in \mathbb{P},\ p \geq N_0\}?$$

Es gibt gute Gründe anzunehmen, daß, so wie die einzelnen Primzahlen nicht multiplikativ zerlegbar sind, die Gesamtmenge $\mathbb{P}$ nicht additiv zerlegt werden kann. Nach einer auf Sieben beruhenden Methode von Hornfeck [19] kann man, falls es solche Zerlegungen gibt,

$$(\ln x)^C \leq A(x),\ B(x) \leq x(\ln x)^{-C} \text{ für jedes } C > 0 \text{ und } x \geq x_0(C)$$

zeigen. Diese Schranken lassen sich ein gutes Stück verbessern, aber bis zu einem Widerspruch scheint es noch weit zu sein.

6. Schlußbemerkung

Mit der vorliegenden, knappen Übersicht wurde Verschiedenes angestrebt. Erstens einen Einblick in die wichtigsten Forschungsergebnisse zu geben. Zweitens zu zeigen, wie das sehr spezielle Goldbach'sche Problem im Lauf der letzten ca. 80 Jahre mit zur Entwicklung allgemeiner, vielfältig anwendbarer Methoden beigetragen hat. Und drittens anzudeuten, wie Hilfsmittel aus verschiedenen Teilen der Mathematik für dieses elementar-zahlentheoretische Thema nutzbar gemacht werden konnten. Als Bilanz darf man festellen: Es ist vieles geklärt, aber ebensoviel noch rätselhaft.

Zur Zeit herrscht in Fachkreisen ein wenig der Eindruck vor, daß die wichtigsten Methoden, analytische und Sieb-theoretische, weitgehend ausgereizt sind. Im Gegensatz zu dem unlängst durch A. Wiles gelösten großen Fermat-Problem, dessen Fall dank der stürmischen Entwicklung algebraischer Hilfsmittel in der Luft lag, steht hier keine umfassende Theorie im Hintergrund. Es gibt auch keine allgemeine Vermutung oder Kette von Hypothesen wie beim Fermat-Problem, die das Goldbach-Problem am Ende als einfachen Spezialfall enthält. An der Gültigkeit der Goldbach-Aussage, zumindest für alle hinreichend großen N, zweifelt kaum jemand. Wenn fast alle geraden N sehr viele, etwa $N \ln^{-2} N$ Goldbach-Zerlegungen haben, dann ist es sehr unwahrscheinlich, daß unendlich viele völlig leer ausgehen.

Eine zeitliche Prognose abzugeben, erscheint vermessen. Wie auch immer, man darf der zukünftigen Entwicklung mit Spannung entgegensehen.

Danksagung. Herrn Dr. Gunter Dufner danke ich für die kritische Durchsicht des Manuskripts und zahlreiche Verbesserungsvorschläge.

Literatur

1. Balog, A.: Linear equations in primes. Matematika **39**, 367–378 (1992)
2. Bombieri, E.: On the large sieve. Matematika **12**, 201–225 (1965)
3. Chen, J.-R.: The exceptional set of Goldbach numters, II. Sci. Sin. Ser. A **26**, 714–731 (1983)
4. Chen, J.-R., Ze, W.T.: On the Goldbach Problem. Acta Math. Sin. **32**, 702–718 (1989)
5. Corput, J.G. van der: Sur l'hypothèse de Goldbach pour presque tous les nombres premiers. Acta Arith. **2**, 266–290 (1937)
6. Davenport, H.: Multiplikative number theory. 2. ed. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1980
7. Descartes, R.: Opuscula Posthuma, Excerpta Mathematica. Oeuvres, Bd. X. Amsterdam, 1701
8. Erdös, P.: Some results on additive number theory. Proc. Am. Math. Soc. **5**, 847–853 (1954)
9. Estermann, T.: On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes. Proc. Lond. Soc. II **44**, 307–314 (1938)
10. Euler, L. Briefwechsel. Im Erscheinen. Nr. 765.766. Kommentiert in Bd. I. Basel: Birkhäuser 1957. Abgedruckt in Fuss, P.H.: Correspondence Mathématique et Physique. Tome I. St. Petersburg 1843. Nachdruck durch Johnson Reprint Corp., New York – London,: Johnson 1968
11. Gallagher, P.X.: A large sieve density estimate near $s = 1$. Invent. Math. **11**, 329–339 (1970)
12. Halberstam, H., Richert, H.E.: Sieve methods. London, New York, San Francisco: Academic Press 1974
13. Halberstam, H., Roth, K.F.: Sequences. Oxford: Clarendon 1966
14, 15. Hardy, G.H., Littlewood, J.E.: Some problems of "Partitio Numerorum", II. On the expression of a number as a sum of primes. Acta Math. **44**, 1–70 (1922). V. A further contribution to the study of Goldbach's problem. Proc. Lond. Math Soc. **22**, 46–56 (1924)
16. Heath-Brown, D.R.: Prime twins and Siegel zeros. Proc. Lond. Math. Soc. **47**, 193–224 (1983)
17. Heilbronn, H.: Zbl. Math. **16**, 291–292 (1937)
18. Hilbert, D.: Mathematische Probleme. Vortrag, geh. auf dem Intern. Math. Kongr. Paris 1900. Göttinger Nachr. 1900, 253–297. Ges. Abh. III, Berlin: Springer 1935
19. Hornfeck, B.: Ein Satz über die Primzahlmenge. Math. Z. **60**, 271–273 (1954)
20. Karatsuba, A.A.: Basic analytic number theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1983
21. Landau, E.: Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbach'schen Satz. Gött. Nachr. 1900, 177–186
22. Landau, E.: Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemann'schen Zetafunktion. Vortrag, geh. auf dem Internat. Math. Kongr. Cambridge, 1912. Jahresber. Deutsche Math.-Verein. **21**, 208–228 (1912)
23. Montgomery, H.L., Vaughan, R.C.: The exceptional set in Goldbach's problem. Acta Arith. **27**, 253–270 (1975)
24. Perelli, A., Pintz, J.: On the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals. Compos. Math. **82**, 355–372 (1992)
25. Prachar, K.: Über die Lösungszahl eines Systems von Gleichungen in Primzahlen. Monatsh. Math. **59**, 98–103 (1955)
26. Prachar, K.: Primzahlverteilung. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1957
27. Ribenboim, P.: The book of prime number records. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1988

28. Rieger, G.J.: Über ein lineares Gleichungsystem von Prachar mit Primzahlen. J. Reine Angew. Math. **213**, 103–107 (1963/64)
29. Riesel, H., Vaughan, R.C.: On sums of primes. Ark. Mat. **21**, 46–74 (1983)
30. Schwarz, W.: Einführung in die Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie. Mannheim: BI 1969
31. Sylvester, J.J.: On the partition of an even number into two primes. Proc. Lond. Math. Soc. 4–6 (1871–73). Coll. Math. papers II New York: Chelsea 1973
32. Tschudakov, N.G.: On the density of a set of even integers which are not representable as a sum of two odd primes (Russisch). Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **1**, 25–40 (1938)
33. Vaughan, R.C.: Sommes trigonométriques sur les nombres premires. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **285**, A981–A983 (1977)
34. Vaughan, R.C.: The Hardy-Littlewood Method. Cambridge Tracts in Mathematics, 80. Cambridge, New York: Cambridge University Press 1981
35. Vinogradov, I.M.: Representation of an odd number as the sum of three primers. Dokl. Akad. Nauk SSSR **15**, 291–294 (1937)
36. Wirsing, E.: Thin subbases. Analysis **6**, 285–308 (1986)
37. Wolke, D.: Some applications of zero density theorems for L-functions. Acta Math. Hung. **61**, 241–258 (1993)
38. Zhan, T.: On the representation of large odd integers as the sum of three almost equal primes. Acta Math. Sin. **7**, 259–272 (1991)