Article

Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators
Friedrichs, K.
in: Mathematische Annalen | Mathematische Annalen - 115
24 Page(s) (249 - 272)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie sind nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.
Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:
Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.
Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.
Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:
You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.
By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.
Papendiek 14
37073 Goettingen
Email: info@digizeitschriften.de

Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators.

Von

Kurt Friedrichs in New York.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Spektralzerlegung einer speziellen Klasse von Operatoren der Form $T + K$, wobei T ein bestimmter Operator mit Streckenspektrum und K ein Integraloperator ist. Wir geben eine Klasse von Integraloperatoren K an, derart daß der Operator $T + K$ dasselbe oder nahezu dasselbe Spektrum besitzt wie T.

T ist dabei der Operator, der aus Funktionen $x(t)$ die Funktion $t\,x(t)$ erzeugt. Die zugelassenen Funktionen $x(t)$ sind komplexwertig, für $|t| \leqq 1$ definiert und bilden einen linearen Raum, der in bezug auf eine Norm $\|x\|$ vollständig ist. Wir legen zwei verschiedene Funktionenräume zugrunde: einmal den Hilbertschen Raum aller L^2-integrablen Funktionen, andererseits den Raum aller stetigen Funktionen, die einer Lipschitz-Hölderbedingung mit einem Exponenten $\mu < 1$ genügen.

In jedem Falle erzeugt der Operator T aus $x(t)$ eine Funktion

$$T\,x(t) = t\,x(t)\,^{1)}$$

desselben Raumes.

---

[1]) Um zu klären, in welchem Maße unser Operator T speziell ist, sei darauf hingewiesen, daß auf Grund der Hellingerschen Theorie jeder selbstadjungierte Operator des Hilbertschen Raumes einem Operator T äquivalent ist, der durch $T\,x(t) = t\,x(t)$ gegeben ist; dabei kann x außer von t noch von weiteren Parametern abhängen. T heißt Spektraldarstellung des Operators. Jeder abgeschlossenen t-Menge kann man eine Vielfachheit zuordnen. Kommen nur die Vielfachheiten 0 und 1 vor, so spricht man von einfachem Spektrum; in diesem Falle besitzt der Operator eine Spektraldarstellung, in der die Funktionen x außer von t nicht von weiteren Parametern abhängen. Das Spektrum heißt regulär, wenn jede Nullmenge die Vielfachheit Null hat (also auch keine Punkteigenwerte auftreten). Man sagt, das Spektrum besteht aus einer Strecke, wenn jede Menge außerhalb und jede Nullmenge innerhalb der Strecke die Vielfachheit Null hat.

Unser Operator T repräsentiert somit den Operator, der ein einfaches reguläres Spektrum besitzt, das aus der Strecke $|t| \leqq 1$ besteht. Wesentlich ist für uns übrigens nur die Regularität.

Von der allgemeinen Spektraltheorie (vgl. z. B. M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, 1932) machen wir in dieser Arbeit nur hinsichtlich der Fragestellung Gebrauch, nicht hinsichtlich der Methoden und Sätze.

Die behandelten Operatoren K sind Integraloperatoren mit einem Kerne $k(t, s)$, die aus der Funktion $x(t)$ die Funktion

$$K x(t) = \int_{-1}^{1} k(t, s)\, x(s)\, d s$$

erzeugen. Der (nicht notwendig symmetrische) Kern $k(t, s)$ soll stetig sein und gewissen Hölderbedingungen mit dem Exponenten $\mu < 1$ genügen (es ist zweckmäßig, eine Norm $\|K\|$ einzuführen, so daß diese Bedingungen mit $\|K\| < \infty$ gleichbedeutend sind). Ferner ist $k(t, s)$ der Randbedingung

$$k(t, s) = 0 \quad \text{für} \quad |s| = 1 \tag{0}$$

unterworfen.

Dann ist das Hauptergebnis, daß der Operator $T + K$ dasselbe Spektrum hat wie T, nämlich die Strecke $|t| \leqq 1$, vorausgesetzt, daß $\|K\|$ genügend klein ist. Auch ohne diese Einschränkung für $\|K\|$ kann (unter gewissen Zusatzbedingungen) die Spektralzerlegung von $T + K$ gewonnen werden; dabei zeigt sich, daß neben demselben Streckenspektrum nur noch endlich viele Punkteigenwerte auftreten.

Um die Rolle der Randbedingung (0) zu klären, sei das einfachste Beispiel erwähnt, in dem sie nicht erfüllt ist:

$$k(t, s) = \varepsilon = \text{const.}$$

Hier hat der Operator $T + K$ für $\varepsilon \neq 0$ einen Punkteigenwert[2])

$$\tau = \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}} + 1}{e^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1}$$

mit der Eigenfunktion

$$x(t) = \frac{1}{t - \tau};$$

denn es ist, wie man nachrechnet,

$$t\, x(t) + \varepsilon \int_{-1}^{1} x(s)\, d s = \tau\, x(t).$$

Offenbar gilt $\tau \downarrow 1$ für $\varepsilon \downarrow 0$ und $\tau \uparrow -1$ für $\varepsilon \uparrow 0$[3]).

Ein solches Vorkommnis wird durch die Randbedingung (0) ausgeschlossen.

---

[2]) Es ließe sich leicht zeigen, daß $T + K$ außerdem das Streckenspektrum $|t| \leqq 1$ hat.

[3]) Es liegt hier ein einfaches Beispiel dafür vor, daß die Qualität des Spektrums auch bei beliebig kleiner analytischer Störung sich ändern kann. Vgl. die Arbeiten von Fr. Rellich zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, Math. Annalen 113 (1936), S. 600 u. 677, wo das Problem der Abhängigkeit der Spektralzerlegung von einem Störungsparameter grundsätzlich aufgerollt wird.

Um die Spektraldarstellung des Operators $T + K$ zu gewinnen[4]), werden wir zwei Transformationen U und $\boldsymbol{U}$ einführen, die jede Funktion $x(t)$ des zugrundegelegten Raumes in Funktionen $U x(t)$ bzw. $\boldsymbol{U} x(t)$ desselben Raumes transformieren und den Relationen

$$(1) \qquad (T + K) U = U T$$

$$(1) \qquad \boldsymbol{U}(T + K) = T \boldsymbol{U}$$

genügen. Wir wollen solche Transformationen Rechts- bzw. Links-*Normatoren* von $T + K$ nennen. Wir sagen, sie bilden ein *Paar*, wenn noch

$$(2) \qquad U \boldsymbol{U} = 1$$

gilt.

Ein „Linksnormator" U transformiert jede Funktion $x(t)$ in eine Funktion

$$U x(t) = y(t)$$

derart, daß $(T + K) x(t)$ in

$$\boldsymbol{U}(T + K) x(t) = t y(t)$$

übergeht. Umgekehrt vermittelt der „Rechtsnormator" $\boldsymbol{U}$, daß jeder Funktion $y(t)$ eine Funktion $x(t)$ entspricht, nämlich

$$x(t) = \boldsymbol{U} y(t)$$

derart, daß

$$(T + K) x(t) = \boldsymbol{U} t y(t)$$

wird, also der Funktion $t y(t)$ entspricht.

Existiert ein solches Paar von Normatoren, so ist gesichert, daß die Strecke $|t| \leqq 1$ zum Spektrum von $T + K$ gehört; und der zugehörige Anteil der Spektralzerlegung von $T + K$ wird durch die Normatoren geliefert. Genügt das Paar von Normatoren noch der Relation

$$(3) \qquad U \boldsymbol{U} = 1$$

(wir nennen es dann *intakt*), so liefert es die volle Spektralzerlegung von $T + K$ und das Spektrum von $T + K$ besteht genau aus der Strecke $|t| \leqq 1$.

Ist der Hilbertsche Raum zugrunde gelegt, und ist der Operator K symmetrisch, so kann das intakte Paar von Normatoren unitär gewählt werden. Doch die gegebene Formulierung der Spektralzerlegung nimmt weder Bezug auf die spezielle Metrik des Raumes, noch auf die Symmetrie des Operators.

Die Hauptaufgabe ist nun, den funktionalen Charakter der Normatoren aufzufinden. Es zeigt sich, daß sie aus zwei Operatoren R, $\boldsymbol{R}$ gebildet

---

[4]) Bzw. zu definieren im Falle, daß $T + K$ nicht symmetrisch ist oder nicht im Hilbertschen Raume operiert.

werden, deren Kerne $r(t,s)$ und $\boldsymbol{r}(t,s)$ denselben Bedingungen wie $k(t,s)$ genügen, und zwar in folgender Weise:

$$U\,y(t) = (1 + i\pi r(t,t))\,y(t) + \int_{-1}^{1} \frac{r(t,s)}{s-t}\,y(s)\,ds$$

$$\boldsymbol{U}x(t) = (1 - i\pi \boldsymbol{r}(t,t))\,x(t) - \int_{-1}^{1} \frac{\boldsymbol{r}(t,s)}{s-t}\,x(s)\,ds.$$

Der erste zu beweisende Satz besagt dann genauer, daß $T + K$ für genügend kleines $\|K\|$ genau ein intaktes Paar von Normatoren dieser Form besitzt.

Die Konstruktion von Normatoren hängt somit wesentlich am Studium von Integraloperatoren, deren Kerne eine Singularität wie $\frac{1}{s-t}$ besitzen.

Jedem Integraloperator G mit dem Kern $g(t,s)$, der denselben Bedingungen wie $k(t,s)$ genügt, ordnen wir einen Operator $\breve{G}$ zu, vermöge

$$\breve{G}x(t) = \pi g(t,t)\,x(t) - i\int_{-1}^{1} g(t,s)\,x(s)\,\frac{ds}{s-t},$$

wo das Integral als Cauchys Hauptwert zu verstehen ist. Dann lassen sich die Normatoren der angegebenen Gestalt kurz als

$$U = 1 + i\breve{R}, \qquad \boldsymbol{U} = 1 - i\breve{\boldsymbol{R}}$$

schreiben.

Die Operatoren $\breve{G}$ haben nun folgende Eigenschaften:

A: $\breve{G}x(t)$ liegt im selben Raume wie $x(t)$ und es gibt eine von μ abhängige Konstante N, so daß

$$\|\breve{G}x\| \leqq \mathsf{N}\,\|G\|\,\|x\|.$$

B: Mit G und H gehören auch $\breve{G}H$ und $G\breve{H}$ der genannten Klasse an und es ist

$$\|\breve{G}H\| \leqq \mathsf{N}\,\|G\|\,\|H\|, \quad \|G\breve{H}\| \leqq \mathsf{N}\,\|G\|\,\|H\|.$$

C: Es besteht die Identität

$$\breve{G}\breve{H} = \widetilde{\breve{G}H} + \widetilde{G\breve{H}},$$

und schließlich

D: $$T\breve{G} - \breve{G}T = iG.$$

Eigenschaft A hängt eng mit einem Satze von Priwaloff[5]) zusammen. Sie gilt nicht für $\mu = 1$ und sie beruht wesentlich auf der Randbedingung (0) für G.

---

[5]) Sur les fonctions conjuguées. Bull. de la soc. math. de France **44** (1916), S. 100; im Anschluß an Fatou, Acta math. **30** (1916), S. 361.

Die Identität C ist verwandt mit einer Identität, die Hilbert 1904 aufgestellt hat und die seitdem mehrfach untersucht worden ist[6]).

Die Kenntnis dieser vier Eigenschaften reicht völlig aus, um die Existenz eines intakten Paares von Normatoren $1 + i\breve{R}$ und $1 - i\breve{R}$ für genügend kleines $\|K\|$ zu beweisen.

Zur Behandlung der Spektralzerlegung von $T + K$ ohne Einschränkung für $\|K\|$ sind noch weitere Identitäten heranzuziehen. Alsdann gelangt man zum Ziele, indem man der Idee des Abspaltungsverfahrens von Erhardt Schmidt folgt.

§ 1.

Lipschitz-Hölder-Funktionen.

In diesem § 1 formulieren und beweisen wir vorbereitend eine Reihe von grundsätzlich bekannten Sätzen über Funktionen, die einer Lipschitz-Hölder-Bedingung genügen.

1. Es sei μ eine Zahl aus

$$0 < \mu < 1,$$

die stets festgehalten werde; wir setzen

$$\mathsf{M} = \frac{1}{\mu(1-\mu)}.$$

2. Die im folgenden behandelten Funktionen der reellen Variablen t seien komplexwertig und für $|t| \leqq 1$ definiert.

Ist $p(t)$ eine solche Funktion, so setzen wir

$$\Delta p = \frac{p(t'') - p(t')}{|t'' - t'|^{\mu}}.$$

---

[6]) D. Hilbert, Verh. d. 3. intern. Math. Kongr., Heidelberg (1904), S. 233—240; O. D. Kellogg, Math. Annalen 58 (1904), S. 441—456; F. Noether, Math. Annalen 82 (1921), S. 42. Weitere Literatur (Poincaré, Villat u. a.) in der Enz. d. math. Wissensch.; II C. 3. L. Lichtenstein Nr. 13, S. 233 [146]); II C. 13. E. Hellinger-O. Toeplitz, Nr. 21 b), S. 1452. Bei allen diesen Arbeiten liegt das Hauptinteresse in der Umkehrung von Operationen des Typus

$$y(t) = v(t)\,x(t) + \lambda \int_{-1}^{1} \frac{w(t,s)}{s-t}\,x(s)\,ds.$$

Das entsprechende Problem für Funktionen von mehr Variablen mit zugehörigen Identitäten behandelt G. Giraud, Ann. scient. Éc. norm. sup. 51 (1934), S. 251—372; 53 (1936), S. 1—40, J. math. pures appl. (9) 15 (1936), S. 193—205 im Anschluß an Poincaré, Picard, Bertrand. Ein ähnliches Problem behandelt Tricomi. Nachweise siehe bei Giraud.

Wir bezeichnen die obere Grenze von $|p(t)|$ für $|t| \leqq 1$ mit $\sup |p|$ und mit $\sup |\Delta p|$ die obere Grenze von $|\Delta p|$ für $-1 \leqq t' < t'' \leqq 1$. Dann setzen wir

$$\|p\| = \sup |p| + \sup |\Delta p|.$$

Die Gesamtheit aller Funktionen $p(t)$, für die $\|p\| < \infty$ ist, heiße $\mathfrak{P}$. Die Gesamtheit der $p(t)$ aus $\mathfrak{P}$, die für $|t| = 1$ verschwinden, heiße $\dot{\mathfrak{P}}$; diese Funktionen $p(t)$ denken wir uns für $|t| > 1$ identisch Null fortgesetzt.

Es sei $p(t_1, \ldots, t_n)$ eine für $|t_1| \leqq 1, \ldots, |t_n| \leqq 1$ erklärte komplexwertige Funktion. Die Operation Δ, hinsichtlich der Variablen t_ν angewandt, heiße Δ_{t_ν}. Mit ∇ bezeichnen wir jede der 2^n Operationen, die entstehen, wenn wir auf jede der n Variablen t_ν die Operation Δ_{t_ν} einmal oder keinmal anwenden[7]). $\sup |\nabla p|$ ist die obere Grenze von $|\nabla p|$ für $-1 \leqq t'_\nu < t''_\nu \leqq 1$ bzw. $|t_\nu| \leqq 1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, je nachdem ob Δ_{t_ν} angewandt wurde oder nicht. Wir setzen

$$\|p\| = \sum_{\nabla} \sup |\nabla p|.$$

Die Gesamtheit aller Funktionen $p(t_1, \ldots, t_n)$, für die $\|p\| \leqq \infty$ ist, heiße $\mathfrak{P}^n$. Die Mannigfaltigkeit aller p aus $\mathfrak{P}^n$, die hinsichtlich einiger Variablen am Ende des Intervalls, d. h. für $|t| = 1$ verschwinden, kennzeichnen wir, indem wir in $\mathfrak{P}^n = \overbrace{\mathfrak{P} \ldots \mathfrak{P}}$ an entsprechenden Stellen $\mathfrak{P}$ durch $\dot{\mathfrak{P}}$ ersetzen. Auch diese Funktionen denken wir uns für die betreffenden Variablen t_ν in $|t_\nu| \geqq 1$ identisch Null fortgesetzt.

$\mathfrak{P}^n$ und jede der genannten Teilmannigfaltigkeiten ist ein linearer Raum[8]) und hinsichtlich der Norm $\|p\|$ vollständig.

Satz 1.1. *Gehört* $p(t_1, \ldots, t_n)$ *zu* $\mathfrak{P}^n$, *so liegt* $p'(t_1, \ldots, t_{n-1}) = p(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1})$ *in* $\mathfrak{P}^{n-1}$ *und es ist*

$$\|p'\| \leqq \|p\|.$$

Beweis. Es enthalte ∇_0 nicht die Operationen $\Delta_{t_{n-1}}$ und Δ_{t_n}. Dann entsteht $\nabla_0 p'$ aus $\nabla_0 p$, indem man die Nebenbedingung $t_n = t_{n-1}$ stellt; es ist also $\sup |\nabla_0 p'| \leqq \sup |\nabla_0 p|$. Ist $\nabla_1 = \nabla_0 \Delta_{t_{n-1}}$ so entsteht $\nabla_1 p'$ aus $\nabla_0 \Delta_{t_{n-1}} p + \nabla_0 \Delta_{t_n} p$, indem man im ersten Summanden $t_n = t''_n$, im zweiten $t_{n-1} = t'_{n-1}$ und schließlich in beiden $t'_n = t'_{n-1}$, $t''_n = t''_{n-1}$ setzt. Somit ist $\sup |\nabla_1 p'| \leqq \sup |\nabla_0 \Delta_{t_{n-1}} p| + \sup |\nabla_0 \Delta_{t_n} p|$. Hieraus folgt $\sum_{\nabla} \sup |\nabla p'| \leqq \|p\|$.

Satz 1.2. *Gehört*

$$p(t_1, \ldots, t_m;\ r_1, \ldots, r_l) \quad zu \quad \mathfrak{P}^{m+l},$$
$$q(r_1, \ldots, r_l;\ s_1, \ldots, s_n) \quad zu \quad \mathfrak{P}^{l+n}, \qquad (l = 0, 1, \ldots),$$

---

[7]) Für $n = 2$ bezeichnet also ∇p jeden der Ausdrücke p, $\Delta_{t_1} p$, $\Delta_{t_2} p$, $\Delta_{t_1} \Delta_{t_2} p$.

[8]) $p = 0$ soll stets $p(t) \equiv 0$ bedeuten.

so liegt

$$p\,q\,(t_1, \ldots, t_m;\ r_1, \ldots, r_l;\ s_1, \ldots, s_n)$$
$$= p\,(t_1, \ldots, t_m;\ r_1, \ldots, r_l)\,q\,(r_1, \ldots, r_l;\ s_1, \ldots, s_n) \quad \textit{in} \quad \mathfrak{P}^{m+l+n}$$

und es ist

$$\|p\,q\| \leqq \|p\|\ \|q\|.$$

Beweis. Sei zunächst $l = 0$. Dann ist $\nabla\, p\,q = \nabla_t p\, \nabla_s q$, wo ∇_t und ∇_s bzw. auf die Variablen t und s operieren. Aus

$$\sup|\nabla\, p\,q| = \sup|\nabla_t p|\sup|\nabla_s p|$$

folgt

$$\sum_{\nabla} \sup|\nabla\, p\,q| = \sum_{\nabla_t} \sup|\nabla_t p| \sum_{\nabla_s} \sup|\nabla_s q|;$$

d. h.

$$\|p\,q\| = \|p\|\ \|q\|.$$

Ist nun $l > 0$, so folgt nach vorangehendem, daß die Funktion $p\,q' = p\,(t_1, \ldots, t_m;\ r_1, \ldots, r_l)\,q\,(r_1', \ldots, r_l';\ s_1, \ldots, s_n)$ in $\mathfrak{P}^{m+2l+n}$ liegt mit $\|p\,q'\| = \|p\|\ \|q\|$. Identifizieren wir nun die Variablen r und r', so ergibt sich die Behauptung aus Satz 1.1.

3. *Integrale* ohne Grenzen sollen sich stets über den Definitionsbereich des Integranden erstrecken, also, wenn der Integrand hinsichtlich der Integrationsvariablen zu $\mathfrak{P}$ bzw. $\dot{\mathfrak{P}}$ gehört, über $(-1, +1)$ bzw. $(-\infty, +\infty)$.

Satz 1.3. Gehört $p\,(t_1, \ldots, t_n)$ zu $\mathfrak{P}^n$, so liegt

$$p'\,(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \int p\,(t_1, \ldots, t_{n-1}, \tau)\,d\tau$$

in $\mathfrak{P}^{n-1}$ und es gilt

$$\|p'\| \leqq 2\,\|p\|.$$

Beweis. Enthält ∇ nicht Δ_{t_n}, so ist $\nabla\, p' = \int \nabla\, p\, d\tau$, also $\sup|\nabla\, p'| \leqq 2 \sup|\nabla\, p|$, woraus $\sum_{\nabla} \sup|\nabla\, p'| \leqq 2\,\|p\|$ folgt.

4. Entscheidend ist das Studium der folgenden Operation. Der Funktion $q\,(r) = q\,(t_1, \ldots, t_{n-1}, r)$ aus $\mathfrak{P}^{n-1}\dot{\mathfrak{P}}$ wird die Funktion

$$p\,(r) = p\,(t_1, \ldots, t_{n-1}, r) = \int q\,(\varrho)\frac{d\,\varrho}{\varrho - r}$$

als „Cauchys Hauptwert" zugeordnet. D. h. wir definieren für $|r| \leqq 1$

$$p\,(r) = \int\limits_{|\varrho - r| \geqq a} q\,(\varrho)\frac{d\,\varrho}{\varrho - r} + \int\limits_0^a [q\,(r + \alpha) - q\,(r - \alpha)]\frac{d\,\alpha}{\alpha},$$

offenbar unabhängig von a, wobei man beachte, daß $q\,(r) \equiv 0$ für $|r| \geqq 1$ erklärt ist.

Hilfssatz 1.1. Für $q\,(r)$ aus $\dot{\mathfrak{P}}$, $p\,(r) = \int q\,(\varrho)\frac{d\,\varrho}{\varrho - r}$ gilt

$$|p\,(r)| \leqq 4\,\mathsf{M} \sup|\Delta\, q|.$$

Beweis. Ohne Beschränkung sei $\sup |\Delta q| = 1$. Wir schließen

$$|p(r)| \leqq \left|\int_0^2 [q(r+\alpha) - q(r-\alpha)] \frac{d\alpha}{\alpha}\right| \leqq \int_0^2 |2\alpha|^\mu \frac{d\alpha}{\alpha} < 4\,\mathsf{M}.$$

Hilfssatz 1.2. Für $q(r)$ aus $\dot{\mathfrak{P}}$, $p(r) = \int q(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho - r}$ gilt

$$|\Delta p(r)| \leqq 8\,\mathsf{M} \sup |\Delta q|.$$

Dieser Satz entspricht dem von Priwaloff[9]).

Beweis. Ohne Beschränkung sei $\sup |\Delta q| = 1$. Wir setzen $r'' = r + b$, $r' = r - b$, $b > 0$; dann wird

$$p(r'') - p(r') = 2b \int q(\varrho) \frac{d\varrho}{(\varrho - r'')(\varrho - r')}$$

$$= 2b \int_{-\infty}^{r} [q(\varrho) - q(r')] \frac{d\varrho}{(\varrho - r'')(\varrho - r')} + 2b \int_{r}^{\infty} [q(\varrho) - q(r'')] \frac{d\varrho}{(\varrho - r'')(\varrho - r')};$$

denn es ist, da für $\varrho = r - b$ bzw. für $\varrho = r + b$ Cauchys Hauptwert zu nehmen ist,

$$\int_{-\infty}^{r} \frac{d\varrho}{(\varrho - r'')(\varrho - r')} = \int_{r}^{\infty} \frac{d\varrho}{(\varrho - r'')(\varrho - r')} = 0.$$

Wir gewinnen

$$|\Delta p| = \frac{|p(r'') - p(r')|}{(2b)^\mu} \leqq (2b)^{1-\mu} \int_{-\infty}^{r} \frac{d\varrho}{|\varrho - r''|\,|\varrho - r'|^{1-\mu}}$$

$$+ (2b)^{1-\mu} \int_{r}^{\infty} \frac{d\varrho}{|\varrho - r''|^{1-\mu}\,|\varrho - r'|} \leqq 2(2b)^{1-\mu} \int_{-b}^{\infty} \frac{d\alpha}{|\alpha|^{1-\mu}(\alpha + 2b)} < 8\,\mathsf{M}.$$

Satz 1.4. *Für* $q(r) = q(t_1, \ldots, t_{n-1}, r)$ *aus* $\mathfrak{P}^{n-1}\dot{\mathfrak{P}}$ *liegt*

$$p(t_1, \ldots, t_{n-1}, r) = \int q(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho - r}$$

in $\mathfrak{P}^n$ *und es ist*

$$\|p\| \leqq 12\,\mathsf{M}\, \|q\|.$$

Beweis. Für $n = 1$ entspringt die Behauptung aus den beiden Hilfssätzen. Ist $n > 1$, so wenden wir die Hilfssätze statt auf q auf $\nabla_0 q$ an, wo ∇_0 die Operation Δ_r nicht enthält; dann gewinnen wir $|\nabla_0 p| \leqq 4\,\mathsf{M} \sup |\Delta_r \nabla_0 q|$, $|\Delta_r \nabla_0 p| \leqq 8\,\mathsf{M} \sup |\Delta_r \nabla_0 q|$ und damit $\sum_{\nu} \sup |\nabla p| \leqq 12\,\mathsf{M}\, \|q\|$.

---

[9]) l. c. Für $p(r) = \int q(\varrho) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}(\varrho - r)\, d\varrho$ und periodisches $q(r)$.

5. Unter $\mathfrak{Z}$ verstehen wir die Gesamtheit der komplexen Zahlen $\zeta = \xi + i\eta$, inklusive $z = \infty$, mit Ausnahme der Strecke $\eta = 0$, $|\xi| \leqq 1$.

Für $q(r) = q(t_1, \ldots, t_{n-1}, r)$ aus $\mathfrak{P}^{n-1}\dot{\mathfrak{P}}$ ist dann

$$Q(\zeta) = \int q(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta}$$

eine analytische Funktion von ζ in $\mathfrak{Z}$. Wir setzen mit $\varepsilon = \pm 1$, $|r| \leqq 1$,

$$Q^{\varepsilon}(r) = \int q(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho - r} + \varepsilon i \pi q(r);$$

nach Satz 1.4 gehört $Q^{\varepsilon}(r)$ zu $\mathfrak{P}^n$.

Hilfssatz 1.3. Mit $q(r)$ aus $\dot{\mathfrak{P}}$ gilt

$$|Q(r + \varepsilon i \varkappa) - Q^{\varepsilon}(r)| \leqq 2\,\mathsf{M}\,\varkappa^{\mu} \sup |\Delta q|$$

für $\varkappa > 0$ und $|r| \leqq 1$. Es konvergiert also $Q(r + \varepsilon i \varkappa)$ für $\varkappa \downarrow 0$ gleichmäßig in r gegen $Q^{\varepsilon}(r)$. (Das entspricht einer in der Potentialtheorie geläufigen Tatsache.)

Beweis. Ohne Beschränkung sei $\sup |\Delta q| = 1$. Es ist für $A > 2$

$$Q(r + \varepsilon i \varkappa) = \int_{-A}^{A} q(r + \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - \varepsilon i \varkappa}$$

$$= \int_{-A}^{A} [q(r + \alpha) - q(r)] \frac{d\alpha}{\alpha - \varepsilon i \varkappa} + \left[\log \frac{A - \varepsilon i \varkappa}{A + \varepsilon i \varkappa} + \varepsilon i \pi\right] q(r),$$

$$Q^{\varepsilon}(r) = \int_{-A}^{A} q(r + \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha} + \varepsilon i \pi q(r)$$

$$= \int_{-A}^{A} [q(r + \alpha) - q(r)] \frac{d\alpha}{\alpha} + \varepsilon i \pi q(r),$$

$$Q(r + \varepsilon i \varkappa) - Q^{\varepsilon}(r) = \varepsilon i \varkappa \int_{-A}^{A} [q(r + \alpha) - q(r)] \frac{d\alpha}{(\alpha - \varepsilon i \varkappa)\alpha} + \log\left[\frac{A - \varepsilon i \varkappa}{A + \varepsilon i \varkappa}\right] q(r)$$

$$= \varepsilon i \varkappa \int_{-\infty}^{\infty} [q(r + \alpha) - q(r)] \frac{d\alpha}{(\alpha - \varepsilon i \varkappa)\alpha},$$

da $A > 2$ beliebig war. Also

$$|Q(r + \varepsilon i \varkappa) - Q^{\varepsilon}(r)| \leqq \varkappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{|\alpha - \varepsilon i \varkappa|\,|\alpha|^{1-\mu}} \leqq 2\,\mathsf{M}\,\varkappa^{\mu}.$$

6. Wir stellen einige Sätze über die Vertauschung von Integrationen zusammen. Die Reihenfolge der Integrationen soll stets durch die Reihen-

folge der Differentiale festgelegt sein. Ist $q(r, s)$ eine Funktion aus $\dot{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}$ bzw. $\dot{\mathfrak{P}}^2$, so liegt $\int q(\varrho, s)\frac{d\varrho}{\varrho - t}$ nach Satz 1.4 in $\mathfrak{P}^2$ bzw. $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$; also liegt nach Satz 1.1 $\int q(\varrho, s)\frac{d\varrho}{\varrho - s}$ in $\mathfrak{P}$ bzw. $\dot{\mathfrak{P}}$.

Hilfssatz 1.4. Für $q(r, s)$ aus $\dot{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}$ gilt

$$\iint q(\varrho, \sigma)\frac{d\varrho}{\varrho - t}d\sigma = \iint q(\varrho, \sigma)d\sigma\frac{d\varrho}{\varrho - t}.$$

Beweis. Wenden wir Hilfssatz 1.3 auf $q(r) = q(r, \sigma)$ an und integrieren nach σ, so entsteht

$$\iint q(\varrho, \sigma)\frac{d\varrho}{\varrho - t - \varepsilon i\varkappa}d\sigma \to \iint q(\varrho, \sigma)\frac{d\varrho}{\varrho - t}d\sigma + \varepsilon i\pi\int q(t, \sigma)d\sigma;$$

wenden wir dagegen Hilfssatz 1.3 auf $q(r) = \int q(r, \sigma)d\sigma$ an, so kommt

$$\iint q(\varrho, \sigma)d\sigma\frac{d\varrho}{\varrho - t - \varepsilon i\varkappa} \to \iint q(\varrho, \sigma)d\sigma\frac{d\varrho}{\varrho - t} + \varepsilon i\pi\int q(t, \sigma)d\sigma.$$

Die linken Seiten stimmen überein, also auch die rechten.

Hilfssatz 1.5. Für $q(r, s)$ aus $\dot{\mathfrak{P}}^2$ gilt

$$\iint q(\varrho, \sigma)\frac{d\varrho}{\varrho - \sigma}d\sigma = \iint q(\varrho, \sigma)\frac{d\sigma}{\varrho - \sigma}d\varrho.$$

Beweis. Wir gehen aus von der Identität

$$\int\Big\{\int\limits_{|\sigma-\varrho|\geqq a} q(\varrho, \sigma)\frac{d\varrho}{\varrho - \sigma}\Big\}d\sigma = \int\Big\{\int\limits_{|\sigma-\varrho|\geqq a} q(\varrho, \sigma)\frac{d\varrho}{\varrho - \sigma}\Big\}d\varrho$$

und beachten, daß nach Definition von Cauchys Hauptwert die Integranden $\{\ \}$ für $a \to 0$ gleichmäßig in σ bzw. ϱ gegen $\int q(\varrho, \sigma)\frac{d\varrho}{\varrho - \sigma}$ bzw. $\int q(\varrho, \sigma)\frac{d\sigma}{\varrho - \sigma}$ streben.

7. Mit einer Funktion $q(r, s)$ aus $\dot{\mathfrak{P}}^2$ bilden wir die Funktion

$$Q(\zeta', \zeta) = \iint q(\varrho, \sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta'}\frac{d\varrho}{\varrho - \zeta},$$

die für ζ, ζ' in $\mathfrak{Z}$ definiert ist. Mit $\varepsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$ setzen wir

$$Q^{\varepsilon\delta}(r, s) = \iint q(\varrho, \sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - s}\frac{d\varrho}{\varrho - r} + \varepsilon i\pi\int q(t, \sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - s}$$
$$+ \delta i\pi\int q(\varrho, s)\frac{d\varrho}{\varrho - r} - \delta\varepsilon\pi^2 q(r, s).$$

Da $\int q(r, \sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - s}$ in $\dot{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}$ liegt, ist das erste Integral definiert. $Q^{\varepsilon\delta}(r, s)$ liegt somit in $\mathfrak{P}^2$.

Hilfssatz 1.6. Mit $q(r, s)$ aus $\dot{\mathfrak{P}}^2$ gilt

$$|Q(r + \varepsilon i\varkappa, s + \delta i\lambda) - Q^{\varepsilon\delta}(r, s)| \leqq (\varkappa^\mu\lambda^\mu + \varkappa^\mu + \lambda^\mu)\,16\,\mathsf{M}^2\,\|q\|.$$

Es strebt also für $\varkappa \downarrow 0$, $\lambda \downarrow 0$, $Q(r + \varepsilon i\varkappa, s + \delta i\lambda)$ gleichmäßig in s, r gegen $Q^{\varepsilon\delta}(r, s)$.

Beweis. Wir setzen mit $\zeta = r + \varepsilon i \varkappa$, $\zeta' = s + \delta i \lambda$

$$p(r) = \int q(r,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta'}, \qquad p_\delta(r) = \int q(r,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-s} + \delta i \pi q(r,s),$$

$$P(\zeta) = \int p(\varrho)\frac{d\varrho}{\varrho-\zeta}, \qquad P_\delta(\zeta) = \int p_\delta(\varrho)\frac{d\varrho}{\varrho-\zeta},$$

$$P^\varepsilon(r) = \int p(\varrho)\frac{d\varrho}{\varrho-r} + \varepsilon i \pi p(r), \quad P_\delta^\varepsilon(r) = \int p_\delta(\varrho)\frac{d\varrho}{\varrho-r} + \varepsilon i \pi p_\delta(r).$$

Dann wird $Q(\zeta,\zeta') = P(\zeta)$, $Q^{\varepsilon\delta}(r,s) = P_\delta^\varepsilon(r)$,

Wir haben also $|P(\zeta) - P_\delta^\varepsilon(r)|$ abzuschätzen. Wir gewinnen nun der Reihe nach folgende Ungleichungen:

(1) $$|p(r) - p_\delta(r)| \leqq 2\,\mathsf{M}\,\lambda^\mu \sup|\Delta_s q|,$$

(2) $$|\Delta_r p(r)| - \Delta_r p_\delta(r)| \leqq 2\,\mathsf{M}\,\lambda^\mu \sup|\Delta_s \Delta_r q|,$$

indem wir Hilfssatz 1.3 auf $q(s) = q(r,s)$ und $q(s) = \Delta_r q(r,s)$ anwenden.

(I) $$|P^\varepsilon(r) - P_\delta^\varepsilon(r)| \leqq 16\,\mathsf{M}^2\,\lambda^\mu \sup|\Delta_s \Delta_r q| + 2\pi\,\mathsf{M}\,\lambda^\mu \sup|\Delta_s q|,$$

indem wir Hilfssatz 1.2 auf $p(r) - p_\delta(r)$ anwenden und Formeln (2) und (1) benutzen.

(II) $$|(P(\zeta) - P_\delta(\zeta)) - (P^\varepsilon(r) - P_\delta^\varepsilon(r))| \leqq 4\,\mathsf{M}^2\,\varkappa^\mu\,\lambda^\mu \sup|\Delta_s \Delta_r q|;$$

hierzu wenden wir Hilfssatz 1.3 auf $q(r) = p(r) - p_\delta(r)$ an und benutzen (2).

(III) $$|P_\delta(\zeta) - P_\delta^\varepsilon(r)| \leqq 8\,\mathsf{M}^2\,\varkappa^\mu \sup|\Delta_s \Delta_r q| + 2\pi\,\mathsf{M}\,\varkappa^\mu \sup|\Delta_r q|;$$

hierzu wenden wir Hilfssatz 1.3 auf $q(r) = p_\delta(r)$ an und schätzen $|\Delta_r p_\delta(r)|$ nach Hilfssatz 1.1 ab durch

(3) $$|\Delta_r p_\delta(r)| \leqq 4\,\mathsf{M} \sup|\Delta_s \Delta_r q| + \pi \sup|\Delta_r q|.$$

Addieren wir die Abschätzungen (I), (II), (III), so entsteht

$$\begin{aligned}|P(\zeta) - P_\delta^r(r)| &\leqq (4\varkappa^\mu\lambda^\mu + 16\lambda^\mu + 8\varkappa^\mu)\,4\,\mathsf{M}^2 \sup|\Delta_s \Delta_r q| \\ &\quad + 2\pi\,\mathsf{M}\,\varkappa^\mu \sup|\Delta_r q| + 2\pi\,\mathsf{M}\,\lambda^\mu \sup|\Delta_s q| \\ &\leqq (\varkappa^\mu\lambda^\mu + \varkappa^\mu + \lambda^\mu)\,16\,\mathsf{M}^2\{\sup|\Delta_s \Delta_r q| + \sup|\Delta_s q| + \sup|\Delta_s q|\};\end{aligned}$$

(denn es ist $\mathsf{M} \geqq 4$, also $2\pi < 16\,\mathsf{M}$), und damit die Behauptung von Hilfssatz 1.6.

Satz 1.5. *Für $q(r,s)$ aus $\mathfrak{P}^2$ besteht die Identität*[10])

$$\begin{aligned}&\iint q(\varrho,\sigma)\frac{d\varrho}{\sigma-\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho-t} \\ &- \iint q(\varrho,\sigma)\frac{d\varrho}{\sigma-\varrho}\frac{d\sigma}{\sigma-t} - \iint q(\varrho,\sigma)\frac{d\varrho}{\varrho-t}\frac{d\sigma}{\varrho-t} + \pi^2 q(t,t) = 0.\end{aligned}$$

---

[10]) Sie entspricht der von Hilbert, Kellogg, F. Noether l. c. verwandten Identität:

$$\begin{aligned}&\iint \frac{\pi^2}{4} b(\varrho)\,\varphi(\sigma)\cot\frac{\pi}{2}(\sigma-\varrho)\cot\frac{\pi}{2}(\varrho-t)\,d\sigma\,d\varrho \\ &- \iint \frac{\pi^2}{4} b(\varrho)\,\varphi(\sigma)\cot(\sigma-\varrho)\cot\frac{\pi}{2}(\varrho-t)\,d\varrho\,d\sigma + \pi^2 b(t)\,\varphi(t) = 0,\end{aligned}$$

wobei $b(r)$ periodisch und bei F. Noether sonst nur stetig sein soll.

Beweis. Wir gehen aus von der Identität

$$\frac{1}{\sigma-\varrho}\,\frac{1}{\varrho-\zeta}-\frac{1}{\sigma-\varrho}\,\frac{1}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{\sigma-\zeta}\,\frac{1}{\varrho-\zeta}=0.$$

Aus ihr gewinnen wir, für ζ aus $\mathfrak{Z}$,

$$\iint q(\varrho,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\varrho}\,\frac{d\varrho}{\varrho-\zeta}-\iint q(\varrho,\sigma)\frac{d\varrho}{\sigma-\varrho}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-\iint q(\varrho,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\,\frac{d\varrho}{\varrho-\zeta}=0,$$

indem wir erst nach σ und dann nach ϱ integrieren und beim zweiten Integral auf Grund von Hilfssatz 1.5 die Reihenfolge vertauschen. Wir setzen $\zeta=t+i\varkappa$ und lassen $\varkappa\downarrow 0$ streben. Wir wenden Hilfssatz 1.3 auf die ersten beiden, Hilfssatz 1.6 mit $\zeta'=\zeta$ auf das dritte Integral an. Dann entsteht in der Grenze

$$\begin{aligned}&\iint q(\varrho,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\varrho}\,\frac{d\varrho}{\varrho-t}+i\pi\int q(t,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-t}\\&-\iint q(\varrho,\sigma)\frac{d\varrho}{\sigma-\varrho}\,\frac{d\sigma}{\sigma-t}-i\pi\int q(\varrho,t)\frac{d\varrho}{t-\varrho}\\&-\iint q(\varrho,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-t}\,\frac{d\varrho}{\varrho-t}-i\pi\int q(t,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-t}-i\pi\int q(\varrho,t)\frac{d\varrho}{\varrho-t}\\&+\pi^2 q(t,t)=0.\end{aligned}$$

Diese Relation ergibt die Behauptung von Satz 1.5.

§ 2.

Operatoren.

1. Wir untersuchen einige Klassen von Operatoren, die auf Funktionen $x(t)$ des Raumes $\mathfrak{P}$ operieren.

Jede Funktion $f(t)$ von $\mathfrak{P}$ führt zu einem Operator $f(T)$, der aus $x(t)$ von $\mathfrak{P}$ die Funktion

$$f(T)\,x(t)=f(t)\cdot x(t)$$

erzeugt; diese liegt (nach Satz 1.2) auch in $\mathfrak{P}$ und es ist

$$\|f(T)\,x\|\leqq\|f\|\,\|x\|.$$

Jede Funktion $g(t,s)$ aus $\mathfrak{P}^2$ ist Kern eines *Integraloperators* G, der aus $x(t)$ von $\mathfrak{P}$ die Funktion

$$G\,x(t)=\int g(t,\sigma)\,x(\sigma)\,d\sigma$$

erzeugt, die (nach Satz 1.2 und 1.3) auch in $\mathfrak{P}$ liegt. Wir setzen

$$\|G\|=\|g\|;$$

dann gilt (nach Satz 1.3)

$$\|G\,x\|\leqq 2\,\|G\|\,\|x\|.$$

Die Klassen aller solchen Operatoren G, deren Kerne in $\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$, $\dot{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}$, $\dot{\mathfrak{P}}^2$ liegen, bezeichnen wir bzw. mit $\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$, $\dot{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}$, $\dot{\mathfrak{P}}^2$.

Operatoren G, G^* mit den Kernen $g(t,s)$, $g^*(t,s)$ heißen zueinander „formal-adjungiert", wenn

$$g^*(t,s) = \overline{g(s,t)}$$

ist; gehört G zu $\dot{\mathfrak{P}}^2$, so auch G^*.

2. Dem Operator G von $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ mit dem Kern $g(t,s)$ ordnen wir den Operator $\tilde{G}$ mit dem Kern $\tilde{g}(t,s) = g(t,s)\frac{1}{s-t}$ zu; er erzeugt aus der Funktion $x(t)$ von $\mathfrak{P}$ die Funktion

$$\tilde{G}x(t) = \int g(t,\varrho)\, x(\varrho)\, \frac{d\varrho}{\varrho - t},$$

die (nach Satz 1.2, 1.4 und 1.1) in $\mathfrak{P}$ liegt mit

$$\|\tilde{G}x\| \leqq 12\,\mathsf{M}\, \|G\|\, \|x\|.$$

Die Rolle dieses Operators $\tilde{G}$ kommt zum Ausdruck in der *Identität*

$$\tilde{G}T - T\tilde{G} = G,$$

genauer, $\tilde{G}T\,x(t) - T\tilde{G}\,x(t) = G\,x(t)$, die offenbar für $x(t)$ aus $\mathfrak{P}$ besteht.

Eine erste wichtige Eigenschaft dieser Operatoren ist die folgende:

Sind G und H Operatoren aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$, so gehören auch $\tilde{G}H$ und $G\tilde{H}$ zu $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ und es ist

$$(*) \qquad \|\tilde{G}H\| \leqq 12\,\mathsf{M}\, \|G\|\, \|H\|; \quad \|G\tilde{H}\| \leqq 12\,\mathsf{M}\, \|G\|\, \|H\|;$$

sind $g(t,s)$, $h(t,s)$ die Kerne von G und H, so sind die Kerne von $\tilde{G}H$ und $G\tilde{H}$ bzw.

$$\tilde{g}h(t,s) = \int g(t,\varrho)\, h(\varrho,s)\, \frac{d\varrho}{\varrho - t}; \qquad g\tilde{h}(t,s) = \int g(t,\varrho)\, h(\varrho,s)\, \frac{d\varrho}{s-\varrho}.$$

Da nach Satz 1.2 $g(t,r)\,h(r,s)$ in $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}^2$ liegt, folgt aus Satz 1.4, daß $g\tilde{h}(t,s)$ und $\tilde{g}h(t,s)$ in $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ liegen mit $\|g\tilde{h}\| \leqq 12\,\mathsf{M}\,\|g\|\,\|h\|$, $\|\tilde{g}h\| \leqq 12\,\mathsf{M}\,\|g\|\,\|h\|$. Ferner liegt nach Satz 1.2 auch $g(t,r)\,h(r,s)\,x(s)$ in $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}^2$. Wir können die Hilfssätze 1.4 bzw. 1.5 auf $q(\varrho,\sigma) = g(t,\varrho)\,h(\varrho,\sigma)\,x(\sigma)$ anwenden und erhalten in der Tat

$$\begin{aligned}\tilde{G}H\,x(t) &= \iint g(t,\varrho)\, h(\varrho,\sigma)\, x(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\varrho - t}\, d\varrho \\ &= \iint g(t,\varrho)\, h(\varrho,\sigma)\, x(\sigma)\, \frac{d\varrho}{\varrho - t}\, d\sigma = \int \tilde{g}h(t,\sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}G\tilde{H}\,x(t) &= \iint g(t,\varrho)\, h(\varrho,\sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma\, \frac{d\varrho}{\sigma - \varrho} \\ &= \iint g(t,\varrho)\, h(\varrho,\sigma)\, x(\sigma)\, \frac{d\varrho}{\sigma - \varrho}\, d\sigma = \int g\tilde{h}(t,\sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma.\end{aligned}$$

3. Dem Operator G mit dem Kern $g(t,s)$ von $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ ordnen wir ferner den Operator

$$\mathring{G} = \pi g(T,T)$$

zu; er erzeugt aus $x(t)$ von $\mathfrak{P}$ die Funktion

$$\mathring{G}\, x(t) = \pi\, g(t,t)\, x(t)$$

aus $\mathfrak{P}$ und es gilt (nach Satz 1. 2)

$$(\overset{*}{*}) \qquad \|\mathring{G} x\| \leqq \pi \|G\| \, \|x\|.$$

Mit G und H gehören auch $\mathring{G} H$ und $G \mathring{H}$ zu $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ und es ist offenbar

$$(\overset{\circ}{\circ}) \qquad \mathring{G}\overset{\circ}{H} = G\overset{\circ}{\mathring{H}} = \mathring{G}\mathring{H},$$

$$(\tilde{\circ}) \qquad \widetilde{\mathring{G}H} = \mathring{G}\tilde{H}, \qquad \widetilde{G\mathring{H}} = \tilde{G}\mathring{H}.$$

Grundlegend sind die folgenden beiden *Identitäten* für G, H aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$:

$$(\overset{\circ}{\sim}) \qquad \tilde{G}\overset{\circ}{H} + G\overset{\circ}{\tilde{H}} = 0,$$

$$(\simeq) \qquad \widetilde{\tilde{G}H} + \widetilde{G\tilde{H}} = \tilde{G}\tilde{H} - \mathring{G}\mathring{H}.$$

Die erste $(\overset{\circ}{\sim})$ folgt daraus, daß der Kern von $\tilde{G}H + G\tilde{H}$:

$$\tilde{g}\, h(t,s) + g\tilde{h}(t,s) = \int g(t,\varrho)\, h(\varrho,s)\Big[\frac{1}{\varrho - t} + \frac{1}{s-\varrho}\Big] d\varrho$$

für $s = t$ verschwindet. Die zweite Identität $(\simeq)$ entspringt unmittelbar aus dem Satz 1. 5, wenn man ihn auf die Funktion $q(r,s) = g(t,r)\, h(r,s)\, x(s)$ anwendet, die (nach Satz 1. 2) in $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}^2$ liegt.

4. Dem Operator G aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ ordnen wir noch den Operator

$$\breve{G} = \mathring{G} - i\tilde{G}$$

zu. Aus dem Vorhergehenden gewinnen wir dann die Sätze A, B, D der Einleitung mit $\mathfrak{P}$ als Raum der $x(t)$, $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ als Klasse der G, H und

$$\mathsf{N} = \pi + 12\,\mathsf{M};$$

an Stelle von Satz C erhalten wir allgemeiner die Identitäten:

$$(\overset{\circ}{\sim}) \qquad \breve{G}\overset{\circ}{H} + G\overset{\circ}{\breve{H}} = 2\,\mathring{G}\mathring{H},$$

$$(\simeq) \qquad \breve{G}\breve{H} + G\breve{\breve{H}} = \breve{G}\breve{H}.$$

Die erste folgt aus $(\overset{\circ}{\circ})$ und $(\overset{\circ}{\sim})$; die zweite aus $(\overset{\circ}{\circ})$, $(\simeq)$, $(\overset{\circ}{\sim})$, $(\tilde{\circ})$:

$$\begin{aligned}\breve{G}\breve{H} + G\breve{\breve{H}} &= \mathring{G}\overset{\circ}{H} + G\overset{\circ}{\mathring{H}} - (\widetilde{\tilde{G}H} + G\widetilde{\tilde{H}}) \\ &\quad - i(\tilde{G}\overset{\circ}{H} + G\overset{\circ}{\tilde{H}}) - i(\widetilde{\mathring{G}H} + G\widetilde{\mathring{H}}) \\ &= \mathring{G}\mathring{H} - \tilde{G}\tilde{H} - i(\mathring{G}\tilde{H} + \tilde{G}\mathring{H}) = (\mathring{G} - i\tilde{G})\,(\mathring{H} - i\tilde{H}).\end{aligned}$$

5. Schließlich sei noch für G, H aus $\dot{\mathfrak{P}}^2$

$$(\breve{G}H)^* = H^*\breve{G}^*, \quad (G\breve{H})^* = \breve{H}^* G^*$$

angemerkt.

§ 3.

Spektralzerlegung des Operators $T \dot{+} K$.

1. Es sei im folgenden K stets ein Operator aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ mit dem Kern $k(t, s)$, der also die Randbedingung (0) der Einleitung erfüllt. Unsere Absicht ist, die Spektraleigenschaften des Operators

$$T + K$$

zu untersuchen. Zu dem Zweck suchen wir, wie in der Einleitung bemerkt, lineare Transformationen U, $\boldsymbol{U}$, die aus Funktionen von $\mathfrak{P}$ wieder solche erzeugen, derart, daß

$$(1) \qquad (T + K)\, U = U\, T,$$

$$(\mathbf{1}) \qquad \boldsymbol{U}(T + K) = T\, \boldsymbol{U}$$

gilt; solche Transformationen nennen wir „Normatoren".

Zwei Normatoren U, $\boldsymbol{U}$ nennen wir ein „Paar", wenn

$$(2) \qquad \boldsymbol{U}\, U = 1$$

gilt; diese Relation hat zur Folge, daß $U\, y(t) \neq 0$ ist für $y(t) \neq 0$. Wir nennen das Paar von Normatoren „intakt", wenn noch die Relation

$$(3) \qquad U\, \boldsymbol{U} = 1$$

besteht; sie hat zur Folge, daß $\boldsymbol{U} x(t) \neq 0$ ist für $x(t) \neq 0$. Umgekehrt gilt:

Ist U, $\boldsymbol{U}$ ein Paar von Normatoren, und folgt $x(t) = 0$ aus $\boldsymbol{U} x(t) = 0$, so ist das Paar intakt. Denn es ist nach (2) $\boldsymbol{U}(U\, \boldsymbol{U} - 1)\, x(t) = 0$.

Beiläufig bemerken wir: Besitzt der Operator $T + K$ ein Paar intakter Normatoren U, $\boldsymbol{U}$ so läßt er sich darstellen als

$$T + K = \boldsymbol{U}\, T\, U;$$

diese Darstellung können wir auch als die Spektralzerlegung von $T + K$ bezeichnen.

Wir wollen zeigen, daß man solche Normatoren unter den Operatoren

$$U = 1 + i\breve{R}$$

$$\boldsymbol{U} = 1 - i\breve{\boldsymbol{R}}$$

zu suchen hat, wo R und $\boldsymbol{R}$ Operatoren aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ sind.

Liegt K in $\dot{\mathfrak{P}}^2$ und ist $U = (1 + i\breve{R})$ Rechtsnormator von $T + K$, so ist $U^* = (1 - i\breve{R}^*)$ Linksnormator von $T + K^*$. Ist $K = K^*$ formalselbstadjungiert, so gewinnt man also aus dem Rechtsnormator $U = (1 + i\breve{R})$ in $U^* = (1 - i\breve{R}^*)$ einen Linksnormator.

2. Für Normatoren $U = 1 + i\breve{R}$, $\boldsymbol{U} = 1 - i\breve{\boldsymbol{R}}$ sind die Relationen (1), (**1**) gleichwertig mit

$$(1)' \qquad K(1 + i\breve{R}) = R,$$

$$(\mathbf{1})' \qquad (1 - i\breve{\boldsymbol{R}})\, K = \boldsymbol{R},$$

wie sich nach D aus $\breve{R}T - T\breve{R} = iR$, $\breve{\boldsymbol{R}}T - T\breve{\boldsymbol{R}} = i\boldsymbol{R}$ ergibt. Aus den Relationen (1)′, (1)′ folgert man

$$(1 - i\breve{\boldsymbol{R}})R = (1 - i\breve{\boldsymbol{R}})K(1 + i\breve{R}) = \boldsymbol{R}(1 + i\breve{R}),$$

also

$$(\dagger) \qquad R - \boldsymbol{R} = i(\breve{\boldsymbol{R}}R + \boldsymbol{R}\breve{R}).$$

Nach § 2 (⌣) wird somit $\breve{R} - \breve{\boldsymbol{R}} = i\breve{\boldsymbol{R}}\breve{R}$, also

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}U &= (1 - i\breve{\boldsymbol{R}})(1 + i\breve{R}) \\ &= 1 + i(\breve{R} - \breve{\boldsymbol{R}}) + \breve{\boldsymbol{R}}\breve{R} = 1. \end{aligned}$$

So gewinnen wir

$$(2) \qquad \boldsymbol{U}U = 1,$$

d. h.

Satz 3.1. *Zwei Normatoren der Gestalt* $U = 1 + i\breve{R}$, $\boldsymbol{U} = 1 - i\breve{\boldsymbol{R}}$ *des Operators* $T + K$ *bilden ein Paar.*

Der Operator $T + K$ besitzt höchstens *ein* Paar von intakten Normatoren der Form $U = (1 + i\breve{R})$, $\boldsymbol{U} = (1 - i\breve{\boldsymbol{R}})$. Denn ist $U' = (1 + i\breve{R}')$ noch ein Rechtsnormator, so folgt aus Satz 3.1 $U' = U\boldsymbol{U}U' = U$.

3. Wir nehmen nun an, daß der Operator $T + K$ ein Paar von Normatoren $U = 1 + i\breve{R}$, $\boldsymbol{U} = 1 - i\breve{\boldsymbol{R}}$ besitzt. Wir können dann die Spektralzerlegung gewinnen, auch wenn die Normatoren nicht intakt sind. Es zeigt sich nämlich, daß zum Spektrum $|t| \leqq 1$ nur noch endlich viele Punkteigenwerte hinzutreten.

Punkteigenwert von $T + K$ ist jede komplexe Zahl τ, zu der es eine Funktion $z(t) \neq 0$ von $\mathfrak{P}$ gibt, mit der

$$(T + K)z(t) = \tau z(t)$$

gilt; Hauptfunktion zu λ ist jede Funktion $z(t) \neq 0$ aus $\mathfrak{P}$, zu der es ein ganzes $m > 0$ gibt, so daß

$$(T + K - \tau)^m z(t) = 0$$

ist. Für jede solche Hauptfunktion $z(t)$ gilt $\boldsymbol{U}z(t) = 0$. Denn es ist

$$(t - \lambda)^m \boldsymbol{U}z(t) = (T - \lambda)^m \boldsymbol{U}z(t) = \boldsymbol{U}(T + K - \lambda)^m z(t) = 0;$$

also $\boldsymbol{U}z(t) = 0$.

4. Wir untersuchen zunächst den Raum $\mathfrak{O}$ aller Funktionen $z(t)$ aus $\mathfrak{P}$, für die

$$\boldsymbol{U}z(t) = 0$$

ist, und wir werden zeigen, daß $\mathfrak{O}$ von den Hauptfunktionen aller Punkteigenwerte von $T + K$ aufgespannt wird. Das ist sehr einfach auf Grund der folgenden entscheidenden Eigenschaft des Raumes $\mathfrak{O}$.

Satz 3.2[11]). *Der Raum* $\mathfrak{O}$ *aller* $z(t)$ *von* $\mathfrak{P}$ *mit* $Uz(t) = 0$ *hat endliche Dimension.*

(Insbesondere hat also $T + K$ höchstens endlich viele Punkteigenwerte und diese sind von endlicher Vielfachheit.)

Zum Beweise führen wir den Operator

$$O = i(\boldsymbol{R} - R) - \breve{R}\boldsymbol{R} - R\breve{\boldsymbol{R}}$$

aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ ein; wie man nach § 2 (ɔ) errechnet, wird

$$U\boldsymbol{U} = 1 - \breve{O}.$$

Für jede Funktion $z(t)$ von $\mathfrak{O}$ ist also

$$z(t) = \breve{O}z(t).$$

Der Operator O hat nun die Eigenschaft, daß

$$\mathring{O} = 0$$

ist; denn nach § 2 (ɔ) ist zunächst $\mathring{O} = i(\mathring{\boldsymbol{R}} - \mathring{R}) - 2\mathring{R}\mathring{\boldsymbol{R}}$; andererseits gilt nach (†)

$$i(\boldsymbol{R} - R) = \breve{\boldsymbol{R}}R + \boldsymbol{R}\breve{R},$$

also nach § 2 (ɔ)

$$i(\mathring{\boldsymbol{R}} - \mathring{R}) = 2\mathring{\boldsymbol{R}}\mathring{R};$$

wegen

$$\mathring{\boldsymbol{R}}\mathring{R} = \mathring{R}\mathring{\boldsymbol{R}}$$

folgt daher $\mathring{O} = 0$.

Ist $o(t, s)$ der Kern von O, so ist also $o(t, t) = 0$; folglich

$$|o(t, s)| = |o(t, t) - o(t, s)| \leqq |t - s|^{\mu} \|o\|.$$

Für den Kern $\tilde{o}(t, s) = o(t, s)\frac{1}{s - t}$ von $\tilde{O}$ gilt also

$$|\tilde{o}(t, s)| \leqq |t - s|^{\mu - 1}\|o\|;$$

d. h. der Integraloperator $\tilde{O}$ wird bei $s = t$ höchstens von der Ordnung $1 - \mu < 1$ unendlich. Infolgedessen gibt es ein ganzes $k > 0$ und $2k$ stetige Funktionen $p_1(t), \ldots, p_k(t); q_1(s), \ldots, q_k(s)$, so daß mit

$$\tilde{o}_k(t, s) = p_1(t)\,\overline{q_1(s)} + \ldots + p_k(t)\,\overline{q_k(s)}$$

$$\sup_t \int |\tilde{o}(t, s) - \tilde{o}_k(t, s)|\, ds < 1$$

ist.

---

[11]) Dieser Satz ist verwandt mit dem Satze von F. Noether (loc. cit.): Es sei $v(t)$, $w(t)$ stetig, $\iint A(s, t)^2\, ds\, dt < \infty$. Dann hat der Raum aller $z(t)$ mit

$$v(t)\, z(t) + \int w(s) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}(t - s)\, z(s)\, ds + \int A(s, t)\, z(s)\, ds = 0$$

endliche Dimension, wenn in $|t| \leqq I$

$$v^2(t) + w^2(t) \neq 0$$

ist. (An Stelle dieser Bedingung nutzen wir $UU = 1$ aus.) F. Noether beweist übrigens ferner, daß diese Dimension nicht von $A(s, t)$ abhängt.

Wäre nun die Dimension von $\mathfrak{O}$ unendlich (oder auch nur $> k$), so enthielte $\mathfrak{O}$ eine Funktion $z(t)$ mit $\sup_t |z(t)| = 1$ und

$$\int \overline{q_1(s)}\, z(s)\, ds = \ldots = \int \overline{q_k(s)}\, z(s)\, ds = 0;$$

also wäre

$$z(t) = \breve{O} z(t) = -i\breve{O} z(t) = -i \int \tilde{o}(t,s)\, z(s)\, ds = -i \int [\tilde{o}(t,s) - \tilde{o}_k(t,s)] z(s)\, ds,$$

und somit

$$|z(t)| \leqq \sup_t \int |\tilde{o}(t,s) - \tilde{o}_k(t,s)|\, ds \sup_s |z(s)| < 1,$$

im Widerspruch zu $\sup_t |z(t)| = 1$.

(Kurz gesagt: der Operator $\breve{O}$ ist vollstetig in bezug auf die Norm $\sup_t |z(t)|$ und infolgedessen hat sein Eigenwert 1 endliche Vielfachheit.)

5. Der Operator $T + K$ erzeugt aus jeder Funktion $z(t)$ von $\mathfrak{O}$ wieder eine Funktion aus $\mathfrak{O}$. Denn es ist für $z(t)$ aus $\mathfrak{O}$

$$\boldsymbol{U}(T + K)\, z(t) = T\, \boldsymbol{U} z(t) = 0.$$

Da der Raum $\mathfrak{O}$ endliche Dimension hat, läßt sich die Elementarteilertheorie auf $T + K$ in $\mathfrak{O}$ anwenden. Es gibt also endlich viele Eigenwerte τ_ν, $(\nu = 1, \ldots, n)$, (die nicht verschieden zu sein brauchen), und zu jedem von ihnen endlich viele Hauptfunktionen $u_{\nu,\mu}(t)$, $(\mu = 1, \ldots, m_\nu)$, die der Relation

$$(T + K - \tau_\nu)\, u_{\nu,\mu}(t) = u_{\nu,\mu-1}(t), \text{ mit } u_{\nu,0}(t) = 0,$$

genügen. Zu jeder Funktion $z(t)$ von $\mathfrak{O}$ gibt es Zahlen $y_{\nu,\mu}$, so daß

$$z(t) = \sum_{\nu,\mu} y_{\nu,\mu}\, u_{\nu,\mu}(t)$$

ist; diese Zuordnungen bezeichnen wir mit $y_{\nu,\mu} = \boldsymbol{U}_{\nu,\mu}\, z(t)$. Eine Funktion $x(t)$ von $\mathfrak{P}$ zerlegen wir in

$$x(t) = U\, \boldsymbol{U} x(t) + (1 - U\, \boldsymbol{U})\, x(t),$$

dann liegt $(1 - U\, \boldsymbol{U})\, x(t)$ in $\mathfrak{O}$; wir setzen $\boldsymbol{U}_{\nu,\mu}\, x(t) = \boldsymbol{U}_{\nu,\mu}(1 - U\boldsymbol{U})\, x(t)$. So gewinnen wir

Satz 3.3. *Der Operator $T + K$ mit K aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ besitze ein Paar von Normatoren $U = (1 + i\breve{R})$, $\boldsymbol{U} = (1 - i\breve{\boldsymbol{R}})$; dann gibt es endlich viele Punkteigenwerte τ_ν, $(\nu = 1, \ldots, n)$, mit Hauptfunktionen $u_{\nu,\mu}(t)$, $(\mu = 1, \ldots, m_\nu)$.*

Jede Funktion $x(t)$ von $\mathfrak{P}$ läßt sich darstellen mit Hilfe von Zahlen

$$y_{\nu,\mu} = \boldsymbol{U}_{\nu,\mu}\, x(t)$$

und von

$$y(t) = \boldsymbol{U} x(t)$$

in der Form

$$x(t) = U\, y(t) + \sum_{\nu,\mu} u_{\nu,\mu}(t)\, y_{\nu,\mu},$$

so daß

$$(T+K)\,x(t) = U\,t\,y(t) + \sum_{\nu,\mu} u_{\nu,\mu}(t)\,(\tau_\nu\, y_{\nu,\mu} + y_{\nu,\mu+1})$$

wird, wo $y_{\nu, m_\nu + 1} = 0$ *zu setzen ist.*

Damit ist die Spektralzerlegung von $T+K$ geleistet.

§ 4.

Existenz von Normatoren.

1. Unter einfachen Bedingungen für den Operator $T+K$ läßt sich die Existenz eines Paares von Normatoren sicherstellen.

Satz 4.1. *Der Operator* $T+K$ *(*K *aus* $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$*) besitzt ein Paar von intakten Normatoren* $U = 1 + i\breve{R}$, $\boldsymbol{U} = 1 - i\breve{\boldsymbol{R}}$ *(*R, $\boldsymbol{R}$ *aus* $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$*), wenn* $\|K\|$ *genügend klein ist.*

Wir nehmen an

$$\odot \qquad \|K\| < \frac{1}{2\,\mathsf{N}}.$$

I. Dann zeigen wir zunächst, daß ein Paar von Normatoren $U = (1 + i\breve{R})$, $\boldsymbol{U} = (1 - i\breve{\boldsymbol{R}})$ intakt ist, wenn $\odot$ gilt.

a) Aus **(1)**′, d. h. $(1 - i\breve{\boldsymbol{R}})\,K = \boldsymbol{R}$ folgt nach B

$$\|\boldsymbol{R}\| \leqq \{1 + \mathsf{N}\,\|\boldsymbol{R}\|\}\,\|K\|,$$

also

$$2\,\mathsf{N}\,\|\boldsymbol{R}\| < 1 + \mathsf{N}\,\|R\|;$$

d. h.

$$\mathsf{N}\,\|\boldsymbol{R}\| < 1.$$

b) Ist $(1 - i\breve{\boldsymbol{R}})\,x(t) = 0$, für ein $x(t)$ von $\mathfrak{P}$, so ist $x(t) = 0$. Denn aus $x(t) = i\breve{\boldsymbol{R}}\,x(t)$ folgt $\|x\| \leqq \mathsf{N}\,\|\boldsymbol{R}\|\;\|x\| < \|x\|$, wenn $x(t) \neq 0$. Also ist das Paar U, $\boldsymbol{U}$ intakt.

II. Wir zeigen, daß unter $\odot$ ein Paar von Normatoren zu $T + iK$ existiert. Wir lösen die Gleichung (1)′ $R = K\,(1 + i\breve{R})$ durch Iteration. Wir setzen $R_0 = 0$, $R_{n+1} = K\,(1 + i\breve{R}_n)$. Nach B wird dann

$$\|R_{n+1} - R_n\| \leqq \|K\|\;\mathsf{N}\,\|R_n - R_{n-1}\| < \tfrac{1}{2}\,\|R_n - R_{n-1}\|.$$

Also konvergiert die Folge R_n in sich; da der Raum $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ abgeschlossen ist, enthält er einen Operator R mit $\|R_n - R\| \to 0$. Aus

$$R - K\,(1 + i\breve{R}) = (R - R_{n+1}) - iK\,(\breve{R} - \breve{R}_n)$$

folgt

$$\|R - K\,(1 - i\breve{R})\| \leqq \|R - R_{n+1}\| + \|K\|\;\|\mathsf{N}\,\|R - R_n\| \to 0,$$

also $R = K\,(1 + i\breve{R})$.

Ebenso ergibt sich die Existenz eines Operators $\boldsymbol{R}$ aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$, der **(1)**′ erfüllt.

2. Wir geben nun Bedingungen dafür an, daß $T + K$ wenigstens ein Paar von (nicht notwendig intakten) Normatoren $U = (1 + i R)$, $\boldsymbol{U} = (1 - i \boldsymbol{R})$ besitzt.

Jeder reellen Zahl τ aus $|\tau| \leqq 1$ ordnen wir den Raum $\mathfrak{P}_\tau$ der Funktionen

$$\frac{x(t)}{t-\tau}$$

zu, wo $x(t)$ die Funktionen von $\mathfrak{P}$ durchläuft. Ist G ein Operator aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$, so erklären wir $G\frac{x(t)}{t-\tau}$ durch

$$G\frac{x(t)}{t-\tau} = \int g(t,s)\,x(s)\,\frac{ds}{s-\tau} - i\pi g(t,\tau)\,x(\tau);$$

diese Funktion liegt nach Satz 1.2, 1.4 in $\mathfrak{P}$. Ferner setzen wir

$$\mathring{G}\frac{x(t)}{t-\tau} = g(t,t)\frac{x(t)}{t-\tau}$$

und erklären $\widetilde{G}\frac{x(t)}{t-\tau}$ durch

$$\widetilde{G}\frac{x(t)}{t-\tau} = \frac{1}{t-\tau}\left[\int g(t,s)\,x(s)\,\frac{ds}{s-t} - \int g(t,s)\,x(s)\,\frac{ds}{s-\tau} + i\pi g(t,\tau)\,x(\tau)\right];$$

diese Funktionen liegen wieder in $\mathfrak{P}_\tau$.

Man überzeuge sich davon, daß diese Definitionen, wenn $\frac{x(t)}{t-\tau}$ selbst in $\mathfrak{P}$ liegt, in die von § 2 übergehen.

Eine reelle Zahl τ aus $|\tau| \leqq 1$ heiße „Punkteigenwert im weiteren Sinne" von $T + K$, wenn es eine Funktion $\frac{x(t)}{t-\tau} \neq 0$ von $\mathfrak{P}_\tau$ gibt mit

$$(T + K)\frac{x(t)}{t-\tau} = \tau\frac{x(t)}{t-\tau},$$

was gleichbedeutend ist mit

$$x(t) + \int k(t,s)\,x(s)\,\frac{ds}{s-\tau} - i\pi k(t,\tau)\,x(\tau) = 0.$$

Der Operator K soll im folgenden zu $\dot{\mathfrak{P}}^2$ gehören.

3. Ein Operator K' aus $\dot{\mathfrak{P}}^2$ heiße von endlichem Range, wenn es ein ganzes $k > 0$ und $2k$ Funktionen $p_\alpha(t)$, $q_\alpha(s)$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$ aus $\dot{\mathfrak{P}}$ gibt, so daß [12])

$$k'(t,s) = p_\alpha(t)\,\overline{q_\alpha(s)} = p_1(t)\,\overline{q_1(s)} + \ldots + p_k(t)\,\overline{q_k(s)}$$

ist. Wir verlangen nun:

(!) Der Operator K aus $\dot{\mathfrak{P}}^2$ läßt sich durch Operatoren K' aus $\dot{\mathfrak{P}}^2$ von endlichem Range so approximieren, daß $\|K' - K\|$ beliebig klein ist.

Diese Bedingung ist jedenfalls erfüllt, wenn $k(t,s)$ stetige erste und gemischt-zweite Ableitungen besitzt.

---

[12]) Wir unterdrücken hier und im folgenden Summenzeichen, wenn der Index α oder β zweimal auftritt.

Satz 4.2. *Es sei K ein Operator aus $\mathfrak{P}^2$, der (!) erfüllt. Hat $T + K$ keinen reellen Eigenwert τ aus $|\tau| \leqq 1$ im weiteren Sinne, so besitzt er einen Rechtsnormator der Gestalt $U = 1 + i\breve{R}$.*

Hat $T + K^*$ keinen reellen Eigenwert τ aus $|\tau| \leqq 1$ im weiteren Sinne, so gibt es zu $T + K$ einen Linksnormator $U = 1 - i\breve{R}$.

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten; denn ist U_* Rechtsnormator von $T + K^*$, so ist U_*^* Linksnormator von $T + K$.

Die erste Behauptung beweisen wir nach dem Muster des Abspaltungsverfahrens von E. Schmidt. Wir approximieren K durch einen Operator K' endlichen Ranges so, daß $\|K' - K\| < \frac{1}{2\mathrm{N}}$ ist. Es sei $k'(t, s) = p_\alpha(t)\overline{q_\alpha(s)}$ der Kern von K'. Wir dürfen $K \neq 0$ voraussetzen und annehmen, daß die Funktionen $p_\alpha(t)$ linear unabhängig sind. Nach Satz 4.1 gibt es ein Paar von intakten Normatoren $U_0 = 1 + i\breve{R}_0$, $U_0 = 1 - i\breve{R}_0$, so daß $U_0(T + K - K')U_0 = T$, also $U_0(T + K)U_0 = T + U_0 K' U_0$ ist. Der Operator $T + U_0 K' U_0$ hat dieselben Eigenwerte wie $T + K$, auch im weiteren Sinne, wie man nachprüfe; ist U' zu ihm ein Rechtsnormator, so ist $U_0 U'$ ein Rechtsnormator von $T + K$.

Der Operator $U_0 K' U_0$ ist aber ebenso von endlichem Range wie K'; sein Kern lautet nämlich

$$U_0 p_\alpha(t)\,\overline{U_0^* q_\alpha(s)}$$

und es sind die $U_0 p_\alpha(t)$ linear unabhängig, da es die $p_\alpha(t)$ sind.

4. Infolgedessen genügt es, den Satz unter der Annahme zu beweisen, daß $K \neq 0$ von endlichem Range ist. Es sei

$$k(t, s) = p_\alpha(t)\overline{q_\alpha(s)},$$

$p_\alpha(t)$, $q_\alpha(s)$ aus $\mathfrak{P}$; die $p_\alpha(t)$ seien linear unabhängig. Wir gewinnen den Normator $U = 1 + i\breve{R}$ durch den Ansatz

$$r(t, s) = p_\alpha(t) j_\alpha(s)$$

und bestimmen $j_\alpha(t)$ nach (1)': $K(1 + i\breve{R}) = R$ aus

$$\overline{q_\alpha(s)} + i\pi\overline{q_\alpha(s)}\,p_\beta(s) j_\beta(s) + \int \overline{q_\alpha(\sigma)}\,p_\beta(\sigma)\frac{d\sigma}{s - \sigma} j_\beta(s) = j_\alpha(s).$$

Dies System von Gleichungen für die Unbekannten $j_1(s), \ldots, j_k(s)$ ist eindeutig lösbar, wenn die Derminante $D(s)$ der Matrix

$$\delta_\alpha^\beta - i\pi\overline{q_\alpha(s)}\,p_\beta(s) - \int \overline{q_\alpha(\sigma)}\,p_\beta(\sigma)\frac{d\sigma}{s - \sigma}$$

für $|s| \leqq 1$ nicht verschwindet. Angenommen, es gäbe ein reelles τ aus $|\tau| \leqq 1$ mit $D(\tau) = 0$; dann gäbe es ein System von Zahlen ι_α, $(\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$, die nicht alle verschwinden, so daß

$$\iota_\alpha - i\pi\overline{q_\alpha(\lambda)}\,p_\beta(\lambda)\,\iota_\beta - \int \overline{q_\alpha(\sigma)}\,p_\beta(\sigma)\frac{d\sigma}{\tau - \sigma}\iota_\beta = 0$$

ist; wir multiplizieren mit $p_\alpha(t)$ und setzen

$$\iota_\alpha p_\alpha(t) = p(t);$$

es ist $p(t) \neq 0$, da die $p_\alpha(t)$ linear unabhängig sind. Wir gewinnen so:

$$p(t) - i\pi k(t,\tau)\, p(\tau) - \int k(t,\sigma)\, p(\sigma) \frac{d\sigma}{\tau - \sigma} = 0;$$

d. h. die Funktion $\frac{p(t)}{t-\tau}$ aus $\mathfrak{P}_\lambda$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert τ im weiteren Sinne. Das aber war ausgeschlossen.

Es ist also $D(s) \neq 0$ für $|s| \leqq 1$. Das obige Gleichungssystem besitzt also eine Lösung $j_\alpha(s)$. Da $D(s)$ in $\mathfrak{P}$ liegt, gehört $\frac{1}{D(s)}$, also auch $j_\alpha(s)$ zu $\mathfrak{P}$. $j_\alpha(s)$ gehört sogar zu $\dot{\mathfrak{P}}$; denn für $|s| = 1$ ist $q_\alpha(s) = 0$; das Gleichungssystem hat somit für $|s| = 1$ die Lösung $j_\alpha(s) = 0$, und die ist eindeutig bestimmt. Es liegt $r(t,s) = p_\alpha(t) j_\alpha(s)$ in $\dot{\mathfrak{P}}^2$ und $(1 + i\breve{R})$ ist in der Tat ein Rechtsnormator von $T + K$.

§ 5.

Spektralzerlegung von $T + K$ im Hilbert-Raume.

1. Als Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ haben wir den Raum aller in $|t| \leqq 1$ erklärten quadratisch integrierbaren Funktionen $x(t)$ zu wählen. Wir setzen

$$(x, y) = \int \overline{x(t)}\, y(t)\, dt, \quad |x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Der Raum $\mathfrak{P}$ liegt dicht in $\mathfrak{H}$ (in bezug auf die Norm $|x|$); es ist für x in $\mathfrak{P}$

$$|x| \leqq 2\,\|x\|.$$

Jeder in $\mathfrak{P}$ erklärte lineare Operator, der (in bezug auf $|x|$) beschränkt ist, läßt sich eindeutig zu einem linearen in $\mathfrak{H}$ erklärten Operator mit derselben Schranke fortsetzen. So sind die Operatoren $f(T)$ aus $\mathfrak{P}$ und G aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ auf $\mathfrak{H}$ zu übertragen; denn es gilt für x in $\mathfrak{P}$

$$|f(T)x| \leqq \|f\|\,|x|; \quad |Gx| \leqq 2\,\|G\|\,|x|.$$

Der Nachweis, daß dasselbe auch für Operatoren $\breve{G}$ mit G aus $\dot{\mathfrak{P}}^2$ gilt, bedarf einiger Vorbereitungen.

Wir betrachten zunächst Operatoren G aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$, für die $\mathring{G} = 0$ ist, deren Kerne $g(t, s)$ also auf der Diagonalen verschwinden:

$$g(t, t) = 0.$$

Für sie besteht die Abschätzung

$$(\dagger) \qquad g(t, s) \leqq \tfrac{1}{2}\,\|g\|\,|t - s|^\alpha;$$

denn es ist

$$\begin{aligned} 2\,|g(t,s)| &= |g(t,s) - g(t,t) + g(t,s) - g(s,s)| \\ &\leqq |t-s|^{\mu} \sup|\Delta_s g| + |t-s|^{\mu} \sup|\Delta_t g| \\ &\leqq |t-s|^{\mu}\,\|g\|. \end{aligned}$$

Hilfssatz 5.1. Ist G ein Operator aus $\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{P}}$ mit $\mathring{G} = 0$, so gilt für $x(t)$ aus P

$$|(x, \breve{G}y)| \leqq 2\,\mathsf{M}\,\|G\|\,|x|\,|y|.$$

Der Beweis beruht auf der Relation (+). Mit ihrer Hilfe schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} &\Big|\iint\limits_{|t-s|\geqq 2\varepsilon} \overline{x(t)}\, g(t,s)\, y(s)\, \frac{ds}{s-t}\, dt\Big| \\ &= \Big|\int\limits_{\varepsilon\leqq\alpha\leqq 1}\ \int\limits_{-1-|\alpha|}^{-1+|\alpha|} g(\beta-\alpha, \beta+\alpha)\, \overline{x(\beta-\alpha)}\, y(\beta+\alpha)\, d\beta\, \frac{d\alpha}{\alpha}\Big| \\ &\leqq \frac{1}{2}\,\|G\|\,|x|\,|y| \int\limits_{|\alpha|\leqq 1} |2\alpha|^{\mu}\, \frac{d\alpha}{\alpha} \leqq 2\,\mathsf{M}\,\|G\|\,|x|\,|y|. \end{aligned}$$

Die linke Seite geht aber für $\varepsilon \to 0$ über in

$$\Big|\iint \overline{x(t)}\, g(t,s)\, y(s)\, \frac{ds}{s-t}\, dt\Big| = |(x, \widetilde{G}y)| = |(x, \breve{G}y)|.$$

Hilfssatz 5.2. Ist G ein Operator aus $\dot{\mathfrak{P}}^2$, G^* seine Formal-Adjungierte, so gilt für $x(t)$, $y(t)$ aus $\mathfrak{P}$

$$(\breve{G}x, y) = (x, \breve{G}^* y).$$

Beweis. Da $g(t,s)$ in $\dot{\mathfrak{P}}^2$ liegt, ist Hilfssatz 1.5 auf

$$q(r,s) = \overline{x(s)}\, \overline{g(r,s)}\, y(r)$$

anwendbar:

$$\begin{aligned} (\widetilde{G}x, y) &= \int \overline{\widetilde{G}x(\varrho)}\, y(\varrho)\, d\varrho = \iint \overline{x(\sigma)}\, \overline{g(\varrho,\sigma)}\, y(\varrho)\, \frac{d\sigma}{\sigma-\varrho}\, d\varrho \\ &= -\iint \overline{x(\sigma)}\, \overline{g(\varrho,\sigma)}\, y(\varrho)\, \frac{d\varrho}{\varrho-\sigma}\, d\sigma = -\int \overline{x(\sigma)}\, \widetilde{G}^* y(\sigma)\, d\sigma = -(x, \widetilde{G}^* y); \end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung.

Satz 5.1. *Liegt der Operator G in $\dot{\mathfrak{P}}^2$, so ist $\breve{G}$ auf $\mathfrak{H}$ beschränkt fortsetzbar und es gilt für x in $\mathfrak{H}$*

$$|\breve{G}x| \leqq 2\,\mathsf{N}\,\|G\|\,|x|.$$

Ein entsprechender Satz wurde von Lichtenstein [13]) angegeben. Unser Beweis benutzt im Prinzip einen von Hilbert (l. c.) verwandten Kunstgriff.

---

[13]) l. c. Mit $x(t)$ ist auch $\int_{-1}^{1} [x(\tau) - x(t)] \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}(\tau - t)\, d\tau$ quadratisch integrierbar.

Beweis. Es ist für x aus $\mathfrak{P}$ nach Hilfssatz 5.2 und § 2 ($\breve{\sim}$), ($\overset{\circ}{\circ}$), ($\tilde{\circ}$), ($\underset{\sim}{\circ}$)

$$|\breve{G}x|^2 = (\breve{G}x, \breve{G}x) = (x, \breve{G}^*\breve{G}x) = (x, (\breve{G^*}G + G^*\breve{G})x)$$
$$= -i(x, (\breve{\tilde{G}^*}G + G^*\breve{\tilde{G}})x) + 2(x, \mathring{G}^*\mathring{G}x).$$

Nach § 2 ($\underset{\sim}{\circ}$) ist $\overset{\circ}{\tilde{G}^*}G + G^*\overset{\circ}{\tilde{G}} = 0$, also folgt aus Hilfssatz 5.1 und ($*$), ($\overset{*}{*}$) § 2

$$|\breve{G}x|^2 \leqq (48\,\mathsf{M}^2 + 2\,\pi^2)\,\|g^2\|\,|x|^2$$

und damit die Behauptung.

2. Ist K ein Operator aus $\mathfrak{P}^2$, so ist $T + K$ ein in $\mathfrak{H}$ beschränkter Operator. Besitzt $T + K$ ein Paar von Normatoren $U = 1 + i\breve{R}$, $\boldsymbol{U} = 1 - i\breve{\boldsymbol{R}}$ mit R, $\boldsymbol{R}$ aus $\mathfrak{P}^2$, so besitzen U, $\boldsymbol{U}$ nach Satz 5.1 in $\mathfrak{H}$ beschränkte Fortsetzungen, die auch U, $\boldsymbol{U}$ heißen sollen. Mit ihnen bestehen die Relationen (1), (1), (2) und, wenn sie intakt sind, auch (3). Der Operator $P = U\boldsymbol{U}$ ist wegen $P^2 = P$ ein (nicht notwendig orthogonaler) Projektor.

Es sei Δt ein Teilintervall von $|t| \leqq 1$ mit den Endpunkten t_1, t_2 und ΔE_t der Operator, der aus der Funktion $x(t)$ von $\mathfrak{H}$ die auch zu $\mathfrak{H}$ gehörige Funktion

$$\Delta E_t\, x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{für } t \text{ in } \Delta t \\ 0 & \text{für } t \text{ außer } \Delta t \end{cases}$$

erzeugt. Dann ist

$$P_{t_2} - P_{t_1} = \Delta P_t = U\,\Delta E_t\,\boldsymbol{U}$$

auch ein Projektor und es bestehen die Relationen

$$\int_{-1}^{1} d\,P_t = P, \qquad \int_{-1}^{1} t\,d\,P_t = (T + K)\,P,$$

wobei die Integration in bekannter Weise nach dem Muster des Stieltjes-Integrals zu definieren ist. Die erste Relation folgt unmittelbar aus

$$\int_{-1}^{1} d\,P_t = U\int_{-1}^{1} d\,E_t\,\boldsymbol{U} = U\,\boldsymbol{U} = P,$$

die zweite aus

$$\int_{-1}^{1} t\,d\,P_t = U\int_{-1}^{1} t\,d\,E_t\,\boldsymbol{U} = U\,T\,\boldsymbol{U} = (T + K)\,P.$$

Es ist also ΔP_t der zum Intervall Δt gehörige Projektor des Operators $T + K$.

Ist $U\boldsymbol{U} = 1$, also $P = 1$, so gibt ΔP_t die vollständige Spektralschar von $T + K$.

Ist $K = K^*$ symmetrisch, so ist $\boldsymbol{U} = U^*$ Linksnormator. Dann sind die Projektoren $P = UU^*$ und ΔP_t orthogonal; U ist längentreu, und, wenn $UU^* = 1$ ist, auch unitär.

(Eingegangen am 5. 2. 1937.)