6.

Bestimmung der Anzahl nicht äquivalenter Classen für die aus λ^{ten} Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen und die idealen Factoren derselben.

(Von Herrn *E. E. Kummer,* Professor in Breslau.)

Die gegenwärtige Untersuchung über die Anzahl der Classen der aus λ^{ten} Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen und der idealen Factoren derselben wird sich genau an meine früher über diese Art der complexen Zahlen veröffentlichten Arbeiten anschliefsen, namentlich an die Abhandlung No. 16. im 35ten Bande dieses Journals, in welcher ich die idealen complexen Zahlen zuerst eingeführt und genau definirt, auch den Begriff der Äquivalenz für dieselben bestimmt, sie hiernach in Classen getheilt und bewiesen habe, dafs für jede Primzahl λ nur eine endliche bestimmte Anzahl nicht äquivalenter Classen existirt. Die genaue Bestimmung dieser Classen-Anzahl aber habe ich daselbst nicht versucht, weil mir bekannt war, dafs *Lejeune-Dirichlet* diese Arbeit, wenn gleich nicht für die idealen complexen Zahlen, so doch für eine bestimmte Art von homogenen Formen $\lambda-1^{ten}$ Grades mit $\lambda-1$ unbestimmten Zahlen, welche (nur in der Anschauungsweise von diesen verschieden) wesentlich mit ihnen übereinstimmen, schon seit einiger Zeit ausgeführt hatte. Als ich mich nun aber mit der Anwendung der Theorie der complexen Zahlen auf den allgemeinen Beweis des *Fermat*'schen Satzes, dafs die Gleichung $x^n+y^n=z^n$, wenn $n>2$, durch ganze Zahlen nicht aufzulösen ist, beschäftigte, war mir die Bestimmung dieser Anzahl der Classen nicht äquivalenter idealer complexer Zahlen dazu unentbehrlich und ich entschlofs mich, die Arbeit, welche bei Zugrundelegung der von *Dirichlet* für die Bestimmung der zu einer gegebenen Determinante gehörenden Classen nicht äquivalenter quadratischer Formen gefundenen Principien, auf dem Standpuncte, zu welchem ich die Theorie der complexen idealen Zahlen in der Abhandlung No. 16. 35ten Bandes dieses Journals bereits gebracht hatte, keine principiellen Schwierigkeiten mehr bot, selbst auszuführen. Das Resultat, insoweit ich es zur Ergründung des oben angegebenen *Fermat*'schen Satzes brauchte, habe ich in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom September 1847 veröffentlicht, aber erst jetzt, nachdem ich von *Dirichlet*, dem die Priorität hier zugehört, selbst aufgefordert worden bin, will ich in der gegenwärtigen Abhandlung auch die Methode auseinandersetzen, welche mich zu diesem Resultate geführt hat. Hierauf werde ich sodann in einer zweiten Abhandlung, als weitere Vorarbeit für meinen Beweis jenes *Fermat*'schen Satzes, die besondere Untersuchung über die Theilbarkeit dieser Classenzahl durch λ und über gewisse complexe Einheiten, welche ich in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom September 1847 kurz entwickelt habe, in etwas veränderter Fassung reproduciren, und endlich, eben so in einer dritten Abhandlung, den auf diese sich stützenden Beweis des *Fermat*'schen Satzes, dessen Grundzüge ich zuerst in einem Briefe an *Lejeune-Dirichlet* mitgetheilt habe, welcher in dem Aprilhefte der Monatsberichte der Berliner Akademie des Jahres 1847 abgedruckt ist.

Es bezeichne q_d eine für den Modul λ zum Exponenten d, einem Divisor von $\lambda-1$, gehörende Primzahl; welche also der Bedingung genügt, dafs $q_d^d \equiv 1$ mod. λ, dafs aber keine niedrigere Potenz von q_d als die d^{te} der Einheit congruent sei, für den Modul λ. Die Primzahl q_d hat unter dieser Voraussetzung allemal genau $\frac{\lambda-1}{d} = \delta$ complexe Primfactoren, welche wirklich, oder ideal sein können; wie es in der Abhandlung No. 16. 35ten Bandes dieses Journals gezeigt worden ist. Eben so sei $q'_{d'}$ eine für den Modul λ zum Exponenten d' gehörende Primzahl, welche darum $\frac{\lambda-1}{d'} = \delta'$ (ideale) complexe Primfactoren enthält, u. s. w. Es stelle ferner $F(\alpha)$, wo $\alpha^\lambda = 1$ ist, irgend eine beliebige ideale oder wirkliche complexe Zahl vor, so hat die Norm derselben $NF(\alpha)$ stets die Form $\lambda^n . q_d^{md} . q'^{m'd'}_{d'} . q''^{m''d''}_{d''} \ldots$, in welcher $q, q', q'', \ldots$ $d, d', d'', \ldots$ die angegebenen Bedeutungen haben und $n, m, m', m'', \ldots$ beliebige, nicht negative ganze Zahlen sind.

Es sei nun

$$1.\quad R = \Sigma \frac{s-1}{(NF(\alpha))^s},$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf alle *verschiedene* complexe, ideale und wirkliche Zahlen $F(\alpha)$ bezieht, und wo als verschieden diejenigen gelten, welche verschiedene Primfactoren enthalten, nicht aber diejenigen, welche, dieselben idealen Primfactoren enthaltend, nur mit verschiedenen complexen Einheiten multiplicirt sind. Die unbestimmte Zahl s wird gröfser als Eins angenommen und später der Grenzwerth der Reihe R für $s=1$ untersucht werden. Alle einzelnen Glieder der Reihe R sind nun von der Form

$$2.\qquad \frac{s-1}{(\lambda^n . q_d^{md} . q'^{m'd'}_{d'} . q''^{m''d''}_{d''} \dots)^s}$$

und es ist zunächst die Frage zu erörtern: wievielmal ein bestimmtes solches Glied in der Reihe R vorkomme, d. i., wieviele verschiedene ideale oder wirkliche complexe Zahlen $F(\alpha)$ es gebe, deren Norm gleich $\lambda^n . q_d^{md} . q'^{m'd'}_{d'} \dots$ ist. Dies geschieht sehr einfach auf folgende Weise. Erstens: da die Norm den Factor q_d^{md} enthält, so mufs die complexe Zahl $F(\alpha)$ von den δ idealen Factoren des q_d genau m enthalten, welche entweder verschieden, oder zum Theil, oder alle gleich sein können. Von vorhandenen δ Elementen lassen sich aber m, wenn Wiederholungen gestattet sind, auf

$$\frac{\delta(\delta+1)(\delta+2)\dots(\delta+m-1)}{1.2.3\dots m}$$

verschiedene Arten nehmen. Auf eben so viele verschiedene Arten kann also der Factor der Norm q_d^{md} entstehen. Eben so ergiebt sich, dafs der Factor der Norm $q'^{m'd'}_{d'}$ auf

$$\frac{\delta'(\delta'+1)\dots(\delta'+m'-1)}{1.2\dots m'}$$

verschiedene Arten entstehen kann u. s. f. Der besondere Factor der Norm λ^n aber kann nur auf eine einzige Weise entstehen, nämlich, wenn $F(\alpha)$ von den complexen Primfactoren des λ, welche alle einander gleich sind und durch $1-\alpha$ dargestellt werden, genau n enthält. Hieraus folgt, wenn

$$3.\qquad NF(\alpha) = \lambda^n . q_d^{md} . q'^{m'd'}_{d'} . q''^{m''d''}_{d''} \dots.$$

ist, dafs es genau

$$\frac{\delta(\delta+1)\dots(\delta+m-1)}{1.2\dots m} . \frac{\delta'(\delta'+1)\dots(\delta'+m'-1)}{1.2\dots m'} . \frac{\delta''(\delta''+1)\dots(\delta''+m''-1)}{1.2\dots m''} \dots.$$

verschiedene complexe Zahlen $F(\alpha)$ giebt, welche diese bestimmte Norm haben. Es läfst sich also die Reihe R jetzt in folgende Form setzen:

$$4.\qquad R = (s-1)\Sigma \frac{\frac{\delta(\delta+1)\dots(\delta+m-1)}{1.2\dots m} . \frac{\delta'(\delta'+1)\dots(\delta'+m'-1)}{1.2\dots m'} \dots.}{\lambda^{ns} . q_d^{mds} . q'^{m'd's}_{d'} \dots.},$$

wo das Summenzeichen sich auf alle verschiedenen Primzahlen q, q', ..., mit deren jeder auch d und δ, d' und δ' u. s. w. gegeben ist, und auf alle nicht negativen ganzzahligen Werthe von n, m, m' u. s. w. bezieht. Dieser Reihe sieht man auf den ersten Blick an, dafs sie das Product folgender Binomialreihen ist:

$$1+\frac{1}{\lambda^s}+\frac{1}{\lambda^{2s}}+\frac{1}{\lambda^{3s}}+\cdots$$

$$1+\frac{\delta}{1}\cdot\frac{1}{q_d^{ds}}+\frac{\delta(\delta+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{q_d^{2ds}}+\cdots$$

$$1+\frac{\delta'}{1}\cdot\frac{1}{q_{d'}^{d's}}+\frac{\delta'(\delta'+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{q'^{2d's}_{d'}}+\cdots$$

u. s. w.

Summirt man diese einzelnen Binomialreihen, so erhält man R folgendermafsen in Form eines Products dargestellt:

$$5.\quad R=\frac{s-1}{1-\frac{1}{\lambda^s}}\cdot\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q_d^{ds}}}\right)^{\delta}\cdot\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q'^{d's}_{d'}}}\right)^{\delta'}\cdots;$$

wo das erste Productzeichen sich auf alle verschiedenen Primzahlen q_d bezieht, welche zum Exponenten d gehören, für den Modul λ; das zweite auf alle zum Exponenten d' gehörenden Primzahlen $q'_{d'}$ u. s. f., und wo genau so viele besondere Producte vorkommen, als $\lambda-1$ verschiedene Divisoren hat, nämlich d, d', u. s. w. Es sei nun β eine primitive Wurzel der Gleichung $\beta^{\lambda-1}=1$ und r irgend eine Zahl, welche mit $\lambda-1$ den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler δ hat, so ist:

$$\left(1-\frac{1}{q_d^{ds}}\right)^{\delta}=\left(1-\frac{1}{q_d^{s}}\right)\left(1-\frac{\beta^r}{q_d^{s}}\right)\left(1-\frac{\beta^{2r}}{q_d^{s}}\right)\cdots\left(1-\frac{\beta^{(\lambda-2)r}}{q_d^{s}}\right),$$

also

$$6.\quad \Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q_d^{ds}}}\right)^{\delta}=\Pi\mathop{\Pi_k}_{0}^{\lambda-2}\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{kr}}{q_d^{s}}}\right).$$

Ich gebe nun dem r den Werth Ind. q_d (mod. λ), da Ind. (q_d) und $\lambda-1$ den gröfsten gemeinschaftlichen Factor δ haben; wie es sein soll. Dafs dies wirklich der Fall ist, wird kurz so gezeigt: Setzt man $q_d\equiv g^h$, mod. λ, wo g eine primitive Wurzel von λ bedeutet, so ist $d.h$ durch $\lambda-1$ theilbar; aber kein niedrigeres Vielfache von h, als das $d$fache, ist durch $\lambda-1$ theilbar, und da $\lambda-1=d.\delta$ ist, so haben $h=$ Ind. q_d und $\lambda-1$ den gemeinschaftlichen

Factor δ; aber keinen gröfseren. Werden nun der in Gleichung (6.) gefundene Ausdruck, in welchem $r = \text{Ind.}\, q_d$, mod. λ, ist, und eben so die entsprechenden Ausdrücke für die andern Producte in der Gleichung (5.) substituirt, so nimmt dieselbe, wie leicht zu sehen ist, folgende einfache Gestalt an:

$$7. \quad R = \frac{s-1}{1-\frac{1}{\lambda^s}} \overset{\lambda-2}{\underset{0}{\Pi_k}} \Pi \frac{1}{1-\frac{\beta^{k\,\text{Ind.}\,q}}{q^s}},$$

wo die Primzahlen q nicht weiter nach den Exponenten zu unterscheiden sind, zu denen sie gehören, für den Modul λ, und das zweite Productzeichen Π sich auf alle Primzahlen q ohne Unterschied bezieht, mit alleiniger Ausnahme der Primzahl λ; denn alle zu den einzelnen Exponenten d, d', d'' u. s. w. gehörenden Primzahlen q_d, $q'_{d'}$, $q''_{d''}$ u. s. w. machen zusammengenommen alle Primzahlen aufser λ aus. Macht man jetzt von der Reihen-Entwicklung

$$\frac{1}{1-\frac{\beta^{k\,\text{Ind.}\,q}}{q^s}} = 1 + \frac{\beta^{k\,\text{Ind.}\,q}}{q^s} + \frac{\beta^{2k\,\text{Ind.}\,q}}{q^{2s}} + \frac{\beta^{3k\,\text{Ind.}\,q}}{q^{3s}} + \dots$$

Gebrauch und stellt sich alle die unendlich vielen, den verschiedenen Werthen des q entsprechenden, in dieser Form enthaltenen Reihen mit einander multiplicirt vor, wobei man von den bekannten Formeln $\text{Ind.}\,q + \text{Ind.}\,q' \equiv \text{Ind.}\,qq'$, mod. $\lambda-1$, und $n.\text{Ind.}\,q \equiv \text{Ind.}\,q^n$, mod. $\lambda-1$, Gebrauch macht, so übersieht man sehr leicht, dafs

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{\beta^{k\,\text{Ind.}\,q}}{q^s}} = \Sigma \frac{\beta^{k\,\text{Ind.}\,n}}{n^s}$$

ist; wo das Summenzeichen Σ sich auf alle ganzzahligen positiven Werthe des n bezieht; mit Ausschlufs der durch λ theilbaren. Demnach hat man

$$8. \quad R = \frac{s-1}{1-\frac{1}{\lambda^s}} \Sigma \frac{1}{n^s} . \Sigma \frac{\beta^{\text{Ind.}\,n}}{n^s} . \Sigma \frac{\beta^{2\,\text{Ind.}\,n}}{n^s} \dots \Sigma \frac{\beta^{(\lambda-2)\,\text{Ind.}\,n}}{n^s}.$$

Läfst man nun das s abnehmend sich der Grenze Eins unendlich nähern, so erhält man bekanntlich

$$(s-1)\Sigma \frac{1}{n^s} = \frac{\lambda-1}{\lambda}, \quad \text{für } s = 1,$$

und die übrigen in dem Ausdrucke (8.) enthaltenen unendlichen Reihen sind bekanntlich für $s=1$ convergent und haben endliche bestimmte Werthe. Deshalb wird

$$9. \quad R = \Sigma\frac{\beta^{\text{Ind.}\,n}}{n}.\Sigma\frac{\beta^{2\,\text{Ind.}\,n}}{n}\dots\Sigma\frac{\beta^{(\lambda-2)\,\text{Ind.}\,n}}{n}, \quad \text{für } s=1.$$

Die einzelnen unendlichen Reihen, welche als Factoren dieses Products auftreten, lassen sich durch endliche Ausdrücke summiren, und da diese Summen, welche wesentlich verschieden sind, je nachdem k ungerade oder gerade ist, von ***Dirichlet*** in der Abhandlung über die arithmetische Reihe gefunden worden sind, so beschränken wir uns hier darauf, nur die Resultate mitzutheilen, welche wir in folgende Form setzen:

$$\Sigma\frac{\beta^{-(2r-1)\,\text{Ind.}\,n}}{n} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{\lambda(\beta^{2r-1},\alpha)}(1+g_1\beta^{2r-1}+g_2\beta^{2(2r-1)}+\dots+g_{\lambda-2}\beta^{(\lambda-2)(2r-1)}),$$

wo $g_1, g_2, g_3, \dots g_{\lambda-2}$ die kleinsten positiven Reste bezeichnen, welche die Potenzen einer primitiven Wurzel $g, g^2, g^3, \dots g^{\lambda-2}$ geben, für den Modul λ, und wo (β^{2r-1},α) den in der Kreistheilung bekannten Ausdruck

$$(\beta^{2r-1},\alpha) = \alpha+\beta^{2r-1}.\alpha^g+\beta^{2(2r-1)}.\alpha^{g^2}+\dots+\beta^{(\lambda-2)(2r-1)}.\alpha^{g^{\lambda-2}}$$

bezeichnet. Ferner

$$\Sigma\frac{\beta^{-2r\,\text{Ind.}\,n}}{n} = \frac{2(l.e(\alpha)+\beta^{2r}l.e(\alpha^g)+\beta^{4r}l.e(\alpha^{g^2})+\dots+\beta^{(\lambda-3)r}l.e(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}}))}{(1-\beta^{-2r})(\beta^{2r},\alpha)},$$

wo $e(\alpha)$ eine bestimmte complexe Einheit bezeichnet, nämlich

$$e(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{(1-\alpha^g)(1-\alpha^{-g})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{-1})}\right)}$$

und

$$(\beta^{2r},\alpha) = \alpha+\beta^{2r}.\alpha^g+\beta^{4r}.\alpha^{g^2}+\dots+\beta^{(\lambda-2)2r}.\alpha^{g^{\lambda-2}}.$$

Substituirt man nun diese Summen in dem Ausdrucke (9.) der Reihe R, wobei man der Kürze wegen das Product

$$\Pi_r{}_1^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}(1+g_1.\beta^{2r-1}+g_2.\beta^{2(2r-1)}+\dots+g_{\lambda-2}.\beta^{(\lambda-2)(2r-1)}) = P$$

und das Product

$$\Pi_r{}_1^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}(le(\alpha)+\beta^{2r}.le(\alpha^g)+\dots+\beta^{(\lambda-3)r}.le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}})) = Q$$

setzt und bemerkt, dafs $(\beta^k,\alpha)(\beta^{-k},\alpha)=\pm\lambda$, $(-1,\alpha)=\pm\sqrt{\pm\lambda}$ und

$$(1-\beta^{-2})(1-\beta^{-4})\dots(1-\beta^{-(\lambda-3)}) = \tfrac{1}{2}(\lambda-1),$$

so hat man

$$10. \quad R = \frac{\pm\pi^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}.2^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}.P.Q}{(\lambda-1).\lambda^{\lambda-\frac{3}{2}}}, \quad \text{für } s=1.$$

Das Product Q läfst noch eine Vereinfachung zu. Nennt man nämlich D die Determinante des Systems folgender $\left(\frac{\lambda-3}{2}\right)^2$ Gröfsen:

$$\begin{array}{llll}
le(\alpha), & le(\alpha^g), & \ldots\ldots & le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-5)}}), \\
le(\alpha^g), & le(\alpha^{g^2}), & \ldots\ldots & le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}}), \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-5)}}), & le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}}), & \ldots\ldots & le(\alpha^{g^{\frac{1}{2}(\lambda-5)}}),
\end{array}$$

so zeigt sich sehr leicht, dafs $Q = \frac{1}{2}(\lambda-1).D$ ist, dafs also R für $s=1$ auch so dargestellt werden kann:

$$11. \quad R = \frac{\pm\pi^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}2^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}.P.D}{\lambda^{\lambda-\frac{3}{2}}}, \quad \text{für } s=1.$$

Wir wenden uns jetzt zu dem zweiten Theile unserer Untersuchung, nämlich zu der Summation derselben Reihe R nach einem andern Principe.

Stellt man sich in der Reihe

$$R = \Sigma\frac{s-1}{(NF(\alpha))^s},$$

wo $F(\alpha)$ alle idealen und wirklichen complexen Zahlen umfafst, diese alle in die nicht äquivalenten Classen abgetheilt vor, so dafs die erste Classe, welche alle *wirklichen* complexen Zahlen enthält, durch $f(\alpha)$, die zweite durch $f_1(\alpha)$, die dritte durch $f_2(\alpha)$ u. s. w. bezeichnet wird, so hat man, wenn die Anzahl aller nicht äquivalenten Classen, mit deren Auffindung sich diese ganze Abhandlung beschäftigt, durch H bezeichnet wird:

$$12. \quad R = \Sigma\frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s}+\Sigma\frac{s-1}{(Nf_1(\alpha))^s}+\ldots\ldots+\Sigma\frac{s-1}{(Nf_{H-1}(\alpha))^s}.$$

Es ist nun für jede einzelne dieser Summen die Grenze zu suchen, welche sie für $s=1$ erreicht. Dieser Grenzwerth wird aber, wie wir später beweisen werden, für alle verschiedene Classen, d. h. für alle diese verschiedenen Summen, genau derselbe, und soll darum nur für die erste Summe, welche die erste Classe der complexen Zahlen, also alle *wirklichen* complexen Zahlen umfafst, hier vollständig bestimmt werden.

Alle wirklichen complexen Zahlen sind in der Form

$$13. \quad f(\alpha) = x\alpha+x_1\alpha^g+x_2\alpha^{g^2}+\ldots\ldots+x_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}$$

enthalten, in welcher x, x_1, x_2, ... $x_{\lambda-2}$ beliebige ganze Zahlen sind. Da aber, vermöge der Einheiten, mit welchen sie multiplicirt vorkommen, jede derselben auf unendlich viele verschiedene Arten durch diese Form dargestellt wird, so suchen wir zunächst die Bedingungen, welchen x, x_1, ... $x_{\lambda-2}$ unterworfen werden müssen, damit jede complexe Zahl nur ein einzigesmal durch diese Form dargestellt werde. Zu diesem Zwecke gebrauchen wir ein System von Fundamental-Einheiten, durch deren Potenz-Erhebung und Multiplication mit einander, wenn noch die einfache Einheit $\pm\alpha^m$ als Factor hinzugefügt wird, alle complexen Einheiten erzeugt werden. Diejenigen unserer geehrten Leser, welche mit der Theorie der complexen Einheiten noch nicht vertraut sein sollten, bitten wir, hierüber einen Aufsatz von ***Dirichlet*** in den Monats-Berichten der Berliner Akademie, vom März des Jahres 1846, nachzusehen. Es sei $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$, ... $\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ ein solches System von Fundamental-Einheiten, und es sei hier, wie auch in dem Folgenden, μ ein abgekürztes Zeichen für $\frac{1}{2}(\lambda-1)$, so umfafst die Form

$$14.\qquad \pm\alpha^m.\varepsilon_1(\alpha)^{m_1}.\varepsilon_2(\alpha)^{m_2}\ldots.\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}}.\varphi(\alpha) = f(\alpha)$$

alle möglichen Darstellungen einer und derselben complexen Zahl $f(\alpha)$, wenn den Potenz-Exponenten m, m_1, m_2, ... $m_{\mu-1}$ alle möglichen ganzzahligen Werthe gegeben werden. Wir abstrahiren jetzt von dem Factor $\pm\alpha^m$, welcher für sich bewirkt, dafs jede complexe Zahl auf 2λ verschiedene Arten dargestellt wird, und bemerken, dafs $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$, ... $\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ lauter reale Gröfsen sind, welche auch immer positiv angenommen werden können und sollen: $f(\alpha)$ aber und $\varphi(\alpha)$ können imaginair sein. Wenn nun nur die realen Theile dieser complexen Zahlen in Betracht gezogen werden, welche gleich $\sqrt{(f(\alpha)f(\alpha^{-1}))}$ und $\sqrt{(\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^{-1}))}$ sind, so giebt die Gleichung (14.), nachdem von dem Factor $\pm\alpha^m$ abstrahirt worden, wenn auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen genommen werden:

$$m_1 l\varepsilon_1(\alpha)+m_2 l\varepsilon_2(\alpha)+\ldots.+m_{\mu-1}l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)+\tfrac{1}{2}l(r\varphi\alpha\varphi\alpha^{-1}) = \tfrac{1}{2}l(rf\alpha f\alpha^{-1}),$$

wo r eine ganz beliebige Gröfse ist, die wir hier hinzugefügt haben, um sie später zweckmäfsig zu benutzen. Verwandelt man noch α in α^g, α^{g^2}, ... $\alpha^{g^{\mu-2}}$, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$15.\quad \left\{\begin{array}{l}
m_1 l\varepsilon_1(\alpha)+m_2 l\varepsilon_2(\alpha)+\ldots.+m_{\mu-1}l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)+\tfrac{1}{2}l(r\varphi\alpha\varphi\alpha^{-1})\\
\qquad = \tfrac{1}{2}l(rf\alpha f\alpha^{-1}),\\
m_1 l\varepsilon_1(\alpha^g)+m_2 l\varepsilon_2(\alpha^g)+\ldots.+m_{\mu-1}l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^g)+\tfrac{1}{2}l(r\varphi\alpha^g\varphi\alpha^{-g})\\
\qquad = \tfrac{1}{2}l(rf\alpha^g f\alpha^{-g}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
m_1 l\varepsilon_1(\alpha^{g^{\mu-2}})+m_2 l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\mu-2}})+\ldots.+m_{\mu-1}l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-2}})+\tfrac{1}{2}l(r\varphi\alpha^{g^{\mu-2}}\varphi\alpha^{-g^{\mu-2}})\\
\qquad = \tfrac{1}{2}l(rf\alpha^{g^{\mu-2}}f\alpha^{-g^{\mu-2}}).
\end{array}\right.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen, in welchen m_1, m_2, ... $m_{\mu-1}$ als Unbekannte angesehen werden sollen, möge ergeben:

$$16.\quad m_k = \frac{\overset{1}{A}_k l(r f\alpha f\alpha^{-1}) + \overset{2}{A}_k l(r f\alpha^g f\alpha^{-g}) + \dots + \overset{\mu-1}{A_k} l(r f\alpha^{g^{\mu-2}} f\alpha^{-g^{\mu-2}})}{2\Delta}$$
$$- \frac{\overset{1}{A}_k l(r\varphi\alpha\,\varphi\alpha^{-1}) + \overset{2}{A}_k l(r\varphi\alpha^g\,\varphi\alpha^{-g}) + \dots + \overset{\mu-1}{A_k} l(r\varphi\alpha^{g^{\mu-2}}\varphi\alpha^{-g^{\mu-2}})}{2\Delta},$$

für $k = 1, 2, 3, \dots \mu-1$. Unterwirft man jetzt die Gröfsen $f\alpha.f\alpha^{-1}$, $f\alpha^g.f\alpha^{-g}$, ... $f\alpha^{g^{\mu-2}}.f\alpha^{-g^{\mu-2}}$, oder die in ihnen enthaltenen Coëfficienten x, x_1, ... $x_{\lambda-2}$ den $\mu-1$ Bedingungen, dafs die Ausdrücke

$$17.\quad z_k = \frac{\overset{1}{A}_k l(rf\alpha f\alpha^{-1}) + \overset{2}{A}_k l(rf\alpha^g f\alpha^{-g}) + \dots + \overset{\mu-1}{A_k} l(rf\alpha^{g^{\mu-2}} f\alpha^{-g^{\mu-2}})}{2\Delta}$$

für $k=1, 2, 3, \dots \mu-1$ alle in den Grenzen 0 und 1 liegen sollen, so giebt es, wie leicht zu sehen, für jede gegebene complexe Zahl $\varphi(\alpha)$ nur ein einziges System von ganzzahligen Werthen der m_1, m_2, ... $m_{\mu-1}$, welche diesen Bedingungen und zugleich den in (16.) enthaltenen Gleichungen genügen: also die Einheit, mit welcher eine complexe Zahl behaftet ist, wenn sie diesen $\mu-1$ Bedingungen genügen soll, ist, mit alleiniger Ausnahme des Factors $\pm\alpha^m$, vollständig bestimmt, und da dieser für sich genau 2λ verschiedene Werthe hat, so schliefsen wir, wenn die Bedingungen, dafs z_1, z_2, ... $z_{\mu-1}$ alle in den Grenzen 0 und 1 liegen, erfüllt sind, dafs jede gegebene complexe Zahl $f(\alpha)$ genau 2λ verschiedene Darstellungen durch die Form

$$f(\alpha) = x\alpha + x_1\alpha^g + \dots + x_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}$$

zuläfst. Kehrt man nun das System von Gleichungen, welches in der Form (17.) enthalten ist, wieder um, so lassen sich die $\mu-1$ Bedingungen auch so darstellen:

$$18.\quad \begin{cases} l\varepsilon_1(\alpha)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha)z_2 + \dots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)z_{\mu-1} = \tfrac{1}{2}l(rf\alpha f\alpha^{-1}) \\ l\varepsilon_1(\alpha^g)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^g)z_2 + \dots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^g)z_{\mu-1} = \tfrac{1}{2}l(rf\alpha^g f\alpha^{-g}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g^{\mu-2}})z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\mu-2}})z_2 + \dots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-2}})z_{\mu-1} = \tfrac{1}{2}l(rf\alpha^{g^{\mu-2}}f\alpha^{-g^{\mu-2}}), \end{cases}$$

und wenn man den Gröfsen x, x_1, ... $x_{\lambda-2}$ in der complexen Zahl $f(\alpha) = x\alpha + x_1\alpha^g + \dots + x_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}$ alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ giebt, welche mit diesen Bedingungen verträglich sind, so erhält man alle verschiedenen *wirklichen* complexen Zahlen, jede genau 2λ mal.

Der Grenzwerth der Summe

$$\Sigma \frac{s-1}{(Nfa)^s}, \text{ für } s=1,$$

ist nun nach den Principien, welche *Dirichlet* in seiner berühmten Abhandlung über die arithmetische Reihe entwickelt hat, gleich der Anzahl der Glieder dieser Reihe, für welche $Nf(\alpha) < T$ ist, dividirt durch T, für $T=\infty$. Die Anzahl aller Glieder, welche $Nf(\alpha) < T$ geben, ist aber gleich dem 2λten Theile der Anzahl aller Werth-Systeme der $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$, für welche die obigen $\mu-1$ Bedingungen gelten, verbunden mit der Bedingung $Nf(\alpha) < T$. Wird jetzt statt der Gröfsen $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ überall $\frac{x}{t}, \frac{x_1}{t}, \ldots \frac{x_{\lambda-2}}{t}$ gesetzt, so geht $f(\alpha)$ in $\frac{f(\alpha)}{t}$ und $Nf(\alpha)$ in $\frac{Nf(\alpha)}{t^{\lambda-1}}$ über; und macht man in den $\mu-1$ Bedingungsgleichungen bei (18.) $r=t^2$, so werden dieselben bei dieser Veränderung:

$$19.\quad \begin{cases} l\varepsilon_1(\alpha)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha)z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)z_{\mu-1} = \frac{1}{2}l(f\alpha f\alpha^{-1}) \\ l\varepsilon_1(\alpha^g)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^g)z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^g)z_{\mu-1} = \frac{1}{2}l(f\alpha^g f\alpha^{-g}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g^{\mu-2}})z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\mu-2}})z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-2}})z_{\mu-1} = \frac{1}{2}l(f\alpha^{g^{\mu-2}} f\alpha^{-g^{\mu-2}}); \end{cases}$$

wo $z_1, z_2, \ldots z_{\mu-1}$ sämmtlich in den Grenzen 0 und 1 liegende Gröfsen sind. Die neuen Gröfsen $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ haben aber nun nicht mehr alle ganzzahligen Werthe, sondern alle um die Differenz t abnehmenden oder zunehmenden Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, welche mit diesen Bedingungen bei (19.) verträglich sind. Setzt man nun $T=\frac{1}{t^{\lambda-1}}$, so wird die obige Bedingung $Nf(\alpha) < T$, für die neuen Werthe der $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ zu $Nf(\alpha) < 1$. Endlich wird t unendlich klein genommen, wodurch T unendlich grofs wird, und die Gröfsen $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ zu continuirlich veränderlichen Gröfsen werden. Die Anzahl der Werthe, welche x annehmen kann, wird gleich $\frac{1}{t}\int dx$; eben so die Anzahl der Werthe, welche x_1 annimmt, gleich $\frac{1}{t}\int dx_1$, u. s. w.; wo die Integrale in den Grenzen zu nehmen sind, welche die obigen Bedingungen angeben. Die Anzahl aller Werthsysteme wird also

$$\frac{1}{t^{\lambda-1}}\int^{(\lambda-1)} dx\, dx_1 \ldots dx_{\lambda-2}$$

und dieselbe durch $T=\frac{1}{t^{\lambda-1}}$ dividirt, giebt

$$\int^{(\lambda-1)} dx\, dx_1 \ldots dx_{\lambda-2},$$

Dieses $\lambda-1$fache Integral, dividirt durch 2λ, drückt also, nach den oben angeführten Principien von *Dirichlet,* die Summe der Reihe $\Sigma\frac{s-1}{(Nf\alpha)^s}$ aus, für $s=1$, oder es ist:

$$20.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf\alpha)^s}=\frac{1}{2\lambda}\int^{(\lambda-1)}dx\,dx_1\ldots dx_{\lambda-2},\ \text{für } s=1;$$

wo $f(\alpha)$ alle verschiedenen *wirklichen* complexen Zahlen umfafst und das $\lambda-1$fache Integral in Beziehung auf seine $\lambda-1$ Variabeln in denjenigen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden Grenzen zu nehmen ist, welche den Bedingungen (19.) und aufserdem der Bedingung $Nf(\alpha)<1$ genügen.

Um dieses Integral zu finden, führe ich statt der $\lambda-1$ Variabeln x, $x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ die neuen Variabeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{\lambda-2}$ ein, welche ich durch folgende Gleichungen bestimme:

$$21.\quad \begin{cases} f(\alpha)=u+u_\mu i & f(\alpha^{-1})=u-u_\mu i\\ f(\alpha^g)=u_1+u_{\mu+1}i & f(\alpha^{-g})=u_1-u_{\mu+1}i\\ \ldots & \ldots\\ f(\alpha^{g^{\mu-1}})=u_{\mu-1}+u_{2\mu-1}i & f(\alpha^{-g^{\mu-1}})=u_{\mu-1}-u_{2\mu-1}i,\end{cases}$$

wo der Kürze wegen $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet ist. Hiernach ist allgemein

$$u_k=\frac{f(\alpha^{g^k})+f(\alpha^{-g^k})}{2},\ \text{für } k=0,1,2,\ldots\mu-1,$$

$$u_k=\frac{f(\alpha^{g^k})-f(\alpha^{-g^k})}{2i},\ \text{für } k=\mu,\mu+1,\ldots 2\mu-1,$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_h}=\frac{\alpha^{g^{k+h}}+\alpha^{-g^{k+h}}}{2},\ \text{für } k=0,1,2,\ldots\mu-1,$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_h}=\frac{\alpha^{g^{k+h}}-\alpha^{-g^{k+h}}}{2i},\ \text{für } k=\mu,\mu+1,\ldots 2\mu-1.$$

Die Transformation des $\lambda-1$fachen Integrals, bei welcher die Variabeln x, $x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ in die neuen Variabeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{2\mu-1}$ verwandelt werden sollen, wird nun bekanntlich durch die Functional-Determinante

$$22.\quad \Sigma\pm\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial u_{\lambda-2}}{\partial x_{\lambda-2}}$$

bestimmt, deren Bildung darum zunächst auszuführen ist. Zu diesem Zwecke bilde ich den Ausdruck

$$23.\quad c_k^h=\frac{\partial u_k}{\partial x}+\beta^h\frac{\partial u_k}{\partial x_1}+\beta^{2h}\frac{\partial u_k}{\partial x_2}+\cdots+\beta^{(\lambda-2)h}\frac{\partial u_k}{\partial x_{\lambda-2}};$$

und suche die Determinante der Gröfsen c_k^h, nämlich

$$\Sigma\pm c_0^0c_1^1c_2^2c_3^3\ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2},$$

welche, nach einem bekannten Satze über Determinanten, gleich ist dem Producte der gesuchten Functional-Determinante der Gröfsen $\frac{\partial u_k}{\partial x_h}$ in die Determinante der Gröfsen β^{kh}. Diese letztere Determinante ist aber bekanntlich gleich dem Producte aller Differenzen je zweier der Gröfsen $1, \beta, \beta^2, \ldots \beta^{\lambda-1}$, dessen Werth nach der Formel

$$(1-\beta)(1-\beta^2)(1-\beta^3)\ldots(1-\beta^{\lambda-2}) = \lambda-1$$

gleich $(\lambda-1)^\mu$ gefunden wird. Man hat daher

$$24. \quad \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 \ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2} = (\lambda-1)^\mu \Sigma \pm \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_{\lambda-2}}{\partial x_{\lambda-2}}.$$

Setzt man nun, um c_k^h zu finden, in dem Ausdrucke (23.) für die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial u_k}{\partial x}, \frac{\partial u_k}{\partial x_1}$, u. s. w. ihre Werthe, so erhält man

$$c_k^h = \frac{\alpha^{g^k}+\alpha^{-g^k}}{2} + \beta^h\left(\frac{\alpha^{g^{k+1}}+\alpha^{-g^{k+1}}}{2}\right) + \ldots + \beta^{(\lambda-2)h}\left(\frac{\alpha^{g^{k-1}}+\alpha^{-g^{k-1}}}{2}\right),$$

wenn $k = 0, 1, 2, \ldots \mu-1$; dagegen

$$c_k^h = \frac{\alpha^{g^k}-\alpha^{-g^k}}{2i} + \beta^h\left(\frac{\alpha^{g^{k+1}}-\alpha^{-g^{k+1}}}{2i}\right) + \ldots + \beta^{(\lambda-2)h}\left(\frac{\alpha^{g^{k-1}}-\alpha^{-g^{k-1}}}{2i}\right),$$

wenn $k = \mu, \mu+1, \ldots 2\mu-1$ ist;

und diese Werthe lassen sich wieder durch Anwendung des bekannten Ausdrucks der Kreistheilung

$$(\beta, \alpha) = \alpha + \beta\alpha^g + \beta^2\alpha^{g^2} + \ldots + \beta^{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}$$

in folgender Form darstellen:

$$c_k^h = \frac{(\beta^h, \alpha^{g^k})+(\beta^h, \alpha^{-g^k})}{2}, \quad \text{wenn } k = 0, 1, 2, \ldots \mu-1 \text{ und}$$

$$c_k^h = \frac{(\beta^h, \alpha^{g^k})-(\beta^h, \alpha^{-g^k})}{2i}, \quad \text{wenn } k = \mu, \mu+1, \ldots 2\mu-1;$$

und da

$$(\beta^h, \alpha^{g^k}) = \beta^{-kh}(\beta^h, \alpha); \quad (\beta^h, \alpha^{-g^k}) = (-1)^h\beta^{-kh}(\beta^h, \alpha)$$

ist, so nehmen diese Ausdrücke folgende einfache Gestalt an:

$$25. \quad \begin{cases} c_k^h = \left(\frac{1+(-1)^h}{2}\right)\beta^{-kh}(\beta^h, \alpha), & \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots \mu-1, \\ c_k^h = \left(\frac{1-(-1)^h}{2i}\right)\beta^{-kh}(\beta^h, \alpha), & \text{für } k = \mu, \mu+1, \ldots 2\mu-1. \end{cases}$$

Die Gröfsen c_k^h haben, wie man hieraus sieht, die Eigenschaft, dafs sie gleich Null werden: erstens wenn h ungerade ist und k einen der Werthe 0, 1, 2, ... $\mu-1$ hat; zweitens wenn h gerade ist und k einen der Werthe μ, $\mu+1$, ... $2\mu-1$ hat. Vermöge dieser beiden Eigenschaften zerfällt die Determinante der Gröfsen c_k^h in ein Product zweier Determinanten und man hat

$$26.\qquad \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 \ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2} = \Sigma \pm c_0^0 c_1^2 c_2^4 \ldots c_{\mu-1}^{2\mu-1} . \Sigma \pm c_\mu^1 c_{\mu+1}^3 c_{\mu+2}^5 \ldots c_{2\mu-1}^{2\mu-1}.$$

Diese beiden Determinanten lassen sich nun mittels der gefundenen Ausdrücke der Gröfsen c_k^h sehr leicht finden. Aus den Gleichungen (25.) folgt nämlich

$$c_k^{2h} = \beta^{-2hk}(\beta^{2h}, \alpha), \qquad \text{wenn } k = 0, 1, 2, \ldots \mu-1,$$
$$c_k^{2h+1} = -i\beta^{-(2h+1)k}(\beta^{2h+1}, \alpha), \quad \text{wenn } k = \mu, \mu+1, \ldots 2\mu-1,$$

und da (β^{2h}, α) und $-i(\beta^{2h+1}, \alpha)$ den untern Index k nicht enthalten, so haben alle Glieder der ersten dieser beiden Determinanten den gemeinschaftlichen Factor $(1, \alpha)$ $(\beta^2, \alpha)(\beta^4, \alpha) \ldots (\beta^{\lambda-3}, \alpha)$, und der andere Factor ist die Determinante der Gröfsen β^{-2hk}; eben so haben alle Glieder der zweiten dieser Determinanten den gemeinschaftlichen Factor $(\beta, \alpha), (\beta^3, \alpha) \ldots (\beta^{\lambda-2}, \alpha).i^\mu$, und als der andere Factor bleibt die Determinante der Gröfsen $\beta^{-(2h+1)k}$. Die beiden Determinanten der Gröfsen β^{-2hk} und $\beta^{-(2h+1)k}$, deren eine gleich dem Producte der Differenzen je zweier der Gröfsen 1, β^{-2}, β^{-4}, ... $\beta^{-(\lambda-3)}$, die andere gleich dem Producte je zweier der Gröfsen β^{-1}, β^{-3}, β^{-5}, ... $\beta^{-(\lambda-2)}$ ist, sind, wie leicht zu zeigen, einander gleich, und zwar ist jede gleich $\mu^{\frac{1}{2}\mu}$; also hat man

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^2 c_2^4 \ldots c_{\mu-1}^{\lambda-3} = \mu^{\frac{1}{2}\mu}(1, \alpha)(\beta^2, \alpha)(\beta^4, \alpha) \ldots (\beta^{\lambda-3}, \alpha),$$
$$\Sigma \pm c_\mu^1 c_{\mu+1}^3 c_{\mu+2}^5 \ldots c_{2\mu-1}^{\lambda-2} = \mu^{\frac{1}{2}\mu}(\beta, \alpha)(\beta^3, \alpha) \ldots (\beta^{\lambda-2}, \alpha).i^\mu,$$

mithin vermöge der Gleichung (26.),

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 \ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2} = \mu^\mu(1, \alpha)(\beta, \alpha)(\beta^2, \alpha) \ldots (\beta^{\lambda-2}, \alpha),$$

und da

$$(1, \alpha) = -1, \quad (\beta^k, \alpha)(\beta^{-k}, \alpha) = \pm\lambda, \quad (\beta^\mu, \alpha) = (-1, \alpha) = \pm\sqrt{\pm\lambda}$$

ist, so ergiebt sich, je zwei solcher Factoren zusammenfassend:

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 \ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2} = \pm\mu^\mu \lambda^{\mu-1}.\sqrt{\pm\lambda}.i^\mu.$$

Das Vorzeichen unter der Wurzel $\sqrt{\pm\lambda}$ ist bekanntlich so zu nehmen, dafs es $+$ ist, wenn λ von der Form $4n+1$, also $\frac{1}{2}(\lambda-1) = \mu$ eine grade Zahl ist, aber $-$, wenn λ von der Form $4n+3$, also $\frac{1}{2}(\lambda-1) = \mu$ eine ungerade Zahl ist. Im ersteren Falle wird $i^\mu = \pm 1$, im zweiten Falle $i^\mu = \pm i$, also ist

$$\Sigma \pm c_0^0 c_1^1 c_2^2 \ldots c_{\lambda-2}^{\lambda-2} = \pm\mu^\mu \lambda^{\mu-\frac{1}{2}};$$

mithin endlich, vermöge Gleichung (24.), weil $\lambda-1=2\mu$ ist:

$$\Sigma\pm\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial u_{\lambda-2}}{\partial x_{\lambda-2}}=\frac{\lambda^{\mu-\frac{1}{2}}}{2^\mu}.$$

Hiernach verwandelt sich das $\lambda-1$fache Integral der Gleichung (20.), dessen Variabeln $x, x_1, \ldots x_{\lambda-2}$ sind, durch Division mit dieser Functional-Determinante in ein anderes, dessen Variabeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{\lambda-2}$ sind, und man erhält

$$27.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s}=\frac{2^{\mu-1}}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}}\int^{(\lambda-1)}du\,du_1\,du_2\ldots du_{\lambda-2}\quad (\text{für } s=1).$$

Ich unterwerfe nun dieses Integral wieder einer neuen Transformation, indem ich statt der Variabeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{\lambda-2}$ die neuen $v, v_1, v_2, \ldots v_{\mu-1}$, $w, w_1, w_2, \ldots w_{\mu-1}$ einführe, welche mittels der Gleichungen

$$u_k=e^{v_k}.\cos w_k,\quad u_{k+\mu}=e^{v_k}.\sin w_k$$

bestimmt sind, wo k die Werthe $0, 1, 2, \ldots \mu-1$, hat. Es läfst sich hier die Functional-Determinante, welche die partiellen Differentialquotienten der Variabeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{\lambda-2}$ in Beziehung auf die neu einzuführenden Variabeln $v, v_1, \ldots v_{\mu-1}, w, w_1, \ldots w_{\mu-1}$ genommen enthält, leichter finden, als die umgekehrte, weshalb wir diese zur Transformation des Integrals benutzen wollen. Mittels der Ausdrücke

$$\frac{\partial u_k}{\partial v_k}=+e^{v_k}\cos w_k,\quad \frac{\partial u_{k+\mu}}{\partial v_k}=+e^{v_k}\sin w_k,$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial w_k}=-e^{v_k}\sin w_k,\quad \frac{\partial u_{k+\mu}}{\partial w_k}=+e^{v_k}\cos w_k,$$

welche für alle Werthe $k=0, 1, 2, \ldots \mu-1$ gelten, und da allgemein $\frac{\partial u_k}{\partial v_h}$, so wie $\frac{\partial u_k}{\partial w_h}$, mit Ansnahme der beiden Fälle $h=k$ und $h+\mu=k$, gleich Null sind, kann man, nach bekannten Sätzen, den Werth dieser Functional-Determinante leicht finden, weshalb wir uns mit der Herleitung derselben nicht aufhalten, sondern nur das Resultat geben, welches

$$\Sigma\pm\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\cdots\frac{\partial u_\mu}{\partial w}\frac{\partial u_{\mu+1}}{\partial w_1}\cdots\frac{\partial u_{2\mu-1}}{\partial w_{\mu-1}}=e^{2v}.e^{2v_1}\ldots e^{2v_{\mu-1}}\text{ ist.}$$

Wird nun mittels dieser Functional-Determinante das Integral der Gleichung (27.) transformirt, so erhält man

$$28.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf\alpha)^s}=\frac{2^{\mu-1}}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}}\int^{(\lambda-1)}e^{2v}.e^{2v_1}\ldots e^{2v_{\mu-1}}dv\,dv_1\ldots dv_{\mu-1}dw\,dw_1\ldots dw_{\mu-1},$$

für $s=1$. Die einschränkenden Bedingungen, welche die Grenzen der

Integrationen für die ursprünglichen Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots x_{\lambda-2}$ bestimmen, nämlich die in den Gleichungen (19.) enthaltenen, verbunden mit der Bedingung $Nf(\alpha) < 1$, werden nun, weil allgemein $f(\alpha^{g^k}).f(\alpha^{-g^k}) = e^{2v_k}$ ist, für die neuen Variabeln folgendermafsen dargestellt:

$$29.\quad \begin{cases} l\varepsilon_1(\alpha)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha)z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)z_{\mu-1} = v \\ l\varepsilon_1(\alpha^g)z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^g)z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^g)z_{\mu-1} = v_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l\varepsilon(\alpha^{g^{\mu-2}})z_1 + l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\mu-2}})z_2 + \ldots + l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-2}})z_{\mu-1} = v_{\mu-2}, \end{cases}$$

wo $z_1, z_2, \ldots z_{\mu-1}$ beliebige, zwischen 0 und 1 liegende Gröfsen sind und

$$e^{2v}.e^{2v_1}.e^{2v_2}\ldots e^{2v_{\mu-1}} < 1 \text{ ist.}$$

Diese Bedingungen enthalten die Gröfsen $w, w_1, w_2, \ldots w_{\mu-1}$ gar nicht, und da

$$30.\quad \operatorname{tang} w_k = \frac{u_{\mu+k}}{u_k}$$

ist und dieser Bruch wegen der Werthe der $x, x_1, \ldots x_{\lambda-1}$, welche nur, μ Bedingungsgleichungen unterworfen, von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren können, selbst von $-\infty$ bis $+\infty$ variirt, und nach den Ausdrücken von u_k und $u_{k+\mu}$, welche ebenfalls sowohl positiv als negativ sein können, auch $\sin w_k$ und $\cos w_k$ sowohl positive als negative Werthe annehmen müssen: so folgt, dafs w_k in den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{3}{2}\pi$ zu nehmen ist. Führt man nun alle Integrationen in Beziehung auf die Variabeln $w, w_1, \ldots w_{\mu-1}$ in diesen Grenzen aus, so erhält man

$$31.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nfa)^s} = \frac{2^{2\mu-1}.\pi^\mu}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}}\int^{(\mu)} e^{2v}e^{2v_1}\ldots e^{2v_{\mu-1}}dv\,dv_1\ldots da_{\mu-1}.$$

Ich führe nun zunächst weiter die Integration in Bezug auf die bestimmte Variable $v_{\mu-1}$ aus. Da $\int e^{2v_{\mu-1}}dv_{\mu-1} = \frac{1}{2}e^{2v_{\mu-1}}$ ist, und da $e^{2v}.e^{2v_1}\ldots e^{2v_{\mu-1}}$ in den Grenzen 0 und 1 liegen mufs, also $v_{\mu-1}$ in den Grenzen $e^{2v_{\mu-1}} = 0$ bis $e^{2v_{\mu-1}} = e^{-2v}.e^{-2v_1}\ldots e^{-2v_{\mu-2}}$ zu nehmen ist, so wird

$$32.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nfa)^s} = \frac{2^{2\mu-2}.\pi^\mu}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}}\int^{(\mu-1)} dv\,dv_1\ldots dv_{\mu-2}.$$

Endlich werden noch statt der Variabeln $v, v_1, \ldots v_{\mu-2}$ die Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_{\mu-1}$ eingeführt, welche durch die Gleichungen (29.) bestimmt und für welche alle Integrationen in den Grenzen 0 und 1 auszuführen sind. Hierzu braucht man die Determinante dieses Systems lineärer Gleichungen (29.), welche ich durch Δ bezeichne, durch deren Anwendung man sogleich

$$\Sigma \frac{s-1}{(Nf\alpha)^s} = \frac{2^{2\mu-2}\pi^\mu \Delta}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}} \int^{(\mu-1)} dz_1 dz_2 \ldots dz_{\mu-1}$$

erhält; und da alle Integrationen in Bezug auf $z_1, z_2, \ldots z_{\mu-1}$ in den Grenzen 0 und 1 auszuführen sind, so hat dieses $\mu-1$fache Integral selbst den Werth 1 und es ist

$$33. \quad \Sigma \frac{s-1}{(Nf\alpha)^s} = \frac{2^{2\mu-2}.\pi^\mu.\Delta}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}}, \text{ für } s=1.$$

Es ist nun weiter zu zeigen, dafs auch die übrigen Glieder des Ausdrucks (12.) alle denselben Werth haben, wie dieses erste, für $s=1$; d. h. dafs allgemein

$$\Sigma \frac{s-1}{(Nf_k(\alpha))^s} = \Sigma \frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s}, \text{ für } s=1$$

ist, wo $f_k(\alpha)$ alle idealen complexen Zahlen einer bestimmten Classe bezeichnet. Diese Zahlen $f_k(\alpha)$, da sie äquivalent sind, haben alle einen und denselben idealen Multiplicator $\varphi(\alpha)$, mit welchem multiplicirt sie zu *wirklichen* complexen Zahlen werden, und es ist, wenn $\varphi(\alpha)f_k(\alpha) = F_k(\alpha)$ gesetzt wird:

$$34. \quad \Sigma \frac{s-1}{(Nf_k(\alpha))^s} = N\varphi(\alpha) \Sigma \frac{s-1}{(NF_k(\alpha))^s}, \text{ für } s=1;$$

wo $F_k(\alpha)$ alle wirklichen complexen Zahlen bedeutet, welche den bestimmten idealen Factor $\varphi(\alpha)$ haben. Die Untersuchung des Werths der Summe

$$\Sigma \frac{s-1}{(NF_k(\alpha))^s}, \text{ für } s=1,$$

ist der obigen Untersuchung der entsprechenden Summe für die complexen Zahlen $f(\alpha)$ vollkommen gleich; nur dafs hier noch gewisse einschränkende Bedingungen hinzutreten, welche die Coëfficienten der wirklichen complexen Zahl $F_k(\alpha)$ erfüllen müssen, damit $F_k(\alpha)$ den idealen complexen Factor $\varphi(\alpha)$ enthalte. Die Bedingung, dafs eine wirkliche complexe Zahl einen gegebenen idealen Factor enthalte, wird aber, wie wir in der Abhandlung 16. Band 35. dieses Journals gezeigt haben, immer durch eine Anzahl Congruenz-Bedingungen ausgedrückt, welche die Coëfficienten der wirklichen complexen Zahl erfüllen müssen und welche durch die idealen Primfactoren dieses idealen Factors vollkommen bestimmt sind. Es möge nun $\varphi(\alpha)$, in seine idealen Primfactoren zerlegt, einen bestimmten der Primfactoren der zum Exponenten d gehörenden realen Primzahl q_d genau m mal enthalten, ferner einen bestimmten der Primfactoren der zum Exponenten d' gehörenden Primzahl $q'_{d'}$ genau m' mal, u. s. w., so wird, wie wir in der oft erwähnten

Abhandlung gezeigt haben, die Bedingung, dafs $F_k(\alpha)$ den ersten dieser Primfactoren $m$mal enthalte, genau durch d Congruenzen für den Modul q_d^m ausgedrückt, welche in Beziehung auf die Coëfficienten der wirklichen complexen Zahl $F_k(\alpha) = x\alpha + x_1\alpha^g + x_2\alpha^{g^2} + \ldots + x_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}$ lineär sind. Eben so wird die Bedingung, dafs $F_k(\alpha)$ den andern Primfactor m'mal enthalte, durch d' solche Congruenzen für den Modul $q'^{m'}_{d'}$ ausgedrückt; u. s. w. Eine einzige lineäre Congruenz unter den Gröfsen x, x_1, $\ldots$ $x_{\lambda-2}$ für den Modul q_d^m macht aber, dafs von allen den Werth-Systemen dieser Gröfsen, welche den übrigen Bedingungen genügen, nur der q_d^mte Theil zu nehmen ist, und d solche Congruenz-Bedingungen zusammen machen demgemäfs, dafs nur der q_d^{md}te Theil gelten kann. Eben so bewirken die d' lineären Congruenzen, mod. $q'^{m'}_{d'}$, dafs von den Werthsystemen der x, x_1, $\ldots$ $x_{\lambda-2}$ nur der $q'^{m'd'}_{d'}$te Theil zu nehmen ist, u. s. w. Der Werth der Summe $\Sigma\frac{s-1}{(NF_k(\alpha))^s}$ ist also genau gleich dem $q_d^{md}.q'^{m'd'}_{d'}\ldots$ ten Theile der Summe $\Sigma\frac{s-1}{(Nf\alpha)^s}$, für $s=1$, wenn $F_k(\alpha)$ alle wirklichen complexen Zahlen bedeutet, welche den idealen Factor $\varphi(\alpha)$ enthalten, und $f(\alpha)$ alle wirklichen complexen Zahlen ohne Ausnahme. Die Gleichung (34.) geht daher in

$$35.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf_k(\alpha))^s} = \frac{N\varphi(\alpha)}{q_d^{md}.q'^{m'd'}_{d'}\ldots}\Sigma\frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s},\quad \text{für } s=1,$$

über, und da vermöge der idealen Primfactoren, welche $\varphi(\alpha)$ nach der Voraussetzung enthält, $N\varphi(\alpha) = q_d^{md}.q'^{m'd'}_{d'}\ldots$ ist, so hat man endlich

$$36.\quad \Sigma\frac{s-1}{(Nf_k(\alpha))^s} = \Sigma\frac{s-1}{(Nf(\alpha))^s};\quad \text{für } s=1;$$

was zu beweisen war.

Da wir nun den Werth des ersten Gliedes der Gleichung (12.) gefunden und bewiesen haben, dafs alle diese Glieder, deren Anzahl gleich H, der Anzahl aller nicht äquivalenten Classen ist, einander gleich sind, so haben wir folgenden zweiten Ausdruck des Werths der Reihe R, für $s=1$:

$$37.\quad R = \frac{2^{2\mu-2}.\pi^\mu.\Delta.H}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}},\quad \text{für } s=1;$$

und da der erste Ausdruck derselben Reihe nach der Gleichung (11.)

$$R = \pm \frac{\pi^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}.2^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}.P.D}{\lambda^{\lambda-\frac{3}{2}}} \quad \text{für } s = 1$$

war, so haben wir endlich, durch Gleichsetzung beider Ausdrücke:

$$\frac{2^{2\mu-2}.\pi^{\mu}.\Delta.H}{\lambda^{\mu+\frac{1}{2}}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}.2^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}.P.D}{\lambda^{\lambda-\frac{3}{2}}},$$

also, nach gehöriger Reduction, da $\mu = \frac{1}{2}(\lambda-1)$ ist, für den gesuchten Ausdruck der Anzahl aller nichtäquivalenten Classen der aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten idealen complexen Zahlen:

$$38. \quad H = \frac{P.D}{(2\lambda)^{\mu-1}.\Delta}.$$

Der bessern Übersicht wegen wiederhole ich hier noch einmal die Bedeutung der einzelnen in dieser Formel vorkommenden Zeichen. Es ist $\mu = \frac{1}{2}(\lambda-1)$; ferner ist

$$P = \varphi(\beta)\varphi(\beta^3)\varphi(\beta^5)\dots\varphi(\beta^{2\mu-1}),$$

wenn

$$\varphi(\beta) = 1+g_1\beta+g_2\beta^2+g_3\beta^3+\dots+g_{\lambda-2}\beta^{\lambda-2},$$

$g_1, g_2, g_3, \dots g_{\lambda-2}$ die kleinsten positiven Reste sind, welche die Potenzen $g, g^2, g^3, \dots g^{\lambda-2}$ einer primitiven Wurzel der Primzahl λ für den Modul λ geben, und β eine primitive Wurzel der Gleichung $\beta^{\lambda-1} = 1$ ist. Ferner ist D die Determinante des Systems folgender Gröfsen:

$$\begin{array}{llll} le(\alpha), & le(\alpha^{g}), & \dots & le(\alpha^{g^{\mu-2}}), \\ le(\alpha^{g}), & le(\alpha^{g^2}), & \dots & le(\alpha^{g^{\mu-1}}), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ le(\alpha^{g^{\mu-2}}), & le(\alpha^{g^{\mu-1}}), & \dots & le(\alpha^{g^{2\mu-4}}). \end{array}$$

Sodann ist

$$e(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{(1-\alpha^{g})(1-\alpha^{-g})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{-1})}\right)}$$

und Δ die Determinante des Systems

$$\begin{array}{llll} l\varepsilon_1(\alpha), & l\varepsilon_2(\alpha), & \dots & l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha), \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g}), & l\varepsilon_2(\alpha^{g}), & \dots & l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g}), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g^{\mu-2}}), & l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\mu-2}}), & \dots & l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-2}}), \end{array}$$

wo $\varepsilon_1(\alpha), \varepsilon_2(\alpha), \dots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ ein System von Fundamental-Einheiten sind.

Da eine vollständige Theorie der aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen zugleich mit die Theorie der aus den Perioden dieser Wurzeln gebildeten complexen Zahlen umfassen mufs und in vielen Stücken sich sogar auf diese stützt, so habe ich nicht versäumt, auch die Ausdrücke für die Anzahl der nichtäquivalenten Classen dieser aus Perioden gebildeten idealen complexen Zahlen vollständig auszuarbeiten. Die anzuwendenden Principien, so wie die Ausführung derselben im Einzelnen, sind aber mit den hier entwickelten so übereinstimmend, dafs ich die Entwicklung dieser Ausdrücke hier übergehe und mich darauf beschränke, nur die Resultate den Lesern mitzutheilen.

Ordnet man die λten Wurzeln der Einheit α, α^g, α^{g^2}, ... $\alpha^{g^{\lambda-2}}$ nach den *Gaufsischen* Perioden, und zwar in e Perioden von je f Gliedern, wo $e.f=\lambda-1$ ist, bildet die aus diesen Perioden zusammengesetzten complexen Zahlen und theilt dieselben und ihre sämmtlichen idealen Factoren in alle nichtäquivalenten Classen ein, welche für dieselben bestehen und deren Anzahl gleich H sei: so müssen in dem Ausdrucke des H die beiden Fälle unterschieden werden, wo f *gerade* und wo f *ungerade* ist, und man erhält dann folgende Resultate.

Erstens, wenn f *gerade* ist, d. h. wenn die Perioden aus einer *geraden* Anzahl von Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda=1$ bestehen, ist

$$39. \quad H=\frac{D}{\Delta};$$

wo D die Determinante folgender $(e-1)^2$ Gröfsen:

$$\begin{array}{llll} lE(\alpha), & lE(\alpha^g), & \ldots & lE(\alpha^{g^{e-2}}), \\ lE(\alpha^g), & lE(\alpha^{g^2}) & \ldots & lE(\alpha^{g^{e-1}}), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ lE(\alpha^{g^{e-2}}), & lE(\alpha^{g^{e-1}}), & \ldots & lE(\alpha^{g^{2e-4}}) \end{array}$$

und

$$E(\alpha)=\sqrt{\left(\frac{(1-\alpha^g)(1-\alpha^{g^{e+1}})\ldots(1-\alpha^{g^{(f-1)e+1}})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{g^e})\ldots(1-\alpha^{g^{(f-1)e}})}\right)}$$

ist; welches eine aus den e Perioden von je f Gliedern gebildete complexe Einheit und wo Δ die Determinante folgender $(e-1)^2$ Gröfsen ist:

$$\begin{array}{llll} l\varepsilon_1(\alpha), & l\varepsilon_2(\alpha), & \dots & l\varepsilon_{e-1}(\alpha), \\ l\varepsilon_1(\alpha^g), & l\varepsilon_2(\alpha^g), & \dots & l\varepsilon_{e-1}(\alpha^g), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g^{e-2}}), & l\varepsilon_2(\alpha^{g^{e-2}}), & \dots & l\varepsilon_{e-1}(\alpha^{g^{e-2}}). \end{array}$$

$\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$, ... $\varepsilon_{e-1}(\alpha)$ ist ein System von Fundamental-Einheiten, welche aus den e Perioden von je f Gliedern gebildet sind.

Zweitens, wenn f *ungerade* ist, d. h. wenn die Perioden aus einer ***ungeraden*** Anzahl von Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ bestehen, so ist

$$40. \quad H = \frac{P.D}{2^{\frac{1}{2}e-1}\Delta},$$

wo D die Determinante folgender $\frac{1}{2}(e-1)^2$ Gröfsen:

$$\begin{array}{llll} lE(\alpha), & lE(\alpha^g), & \dots & lE(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-2}}), \\ lE(\alpha^g), & lE(\alpha^{g^2}), & \dots & lE(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-1}}), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ lE(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-2}}), & lE(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-1}}), & \dots & lE(\alpha^{g^{e-4}}) \end{array}$$

und

$$E(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{(1-\alpha^g)(1-\alpha^{g^{\frac{1}{2}e+1}}) \dots (1-\alpha^{g^{(2f-1)\frac{1}{2}e+1}})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{g^{\frac{1}{2}e}}) \dots (1-\alpha^{g^{(2f-1)\frac{1}{2}e}}}\right)}$$

ist; welches eine aus $\frac{1}{2}e$ Perioden von je $2f$ Gliedern gebildete complexe Einheit ist. Ferner ist Δ die Determinante folgender $(\frac{1}{2}e-1)^2$ Gröfsen:

$$\begin{array}{llll} l\varepsilon_1(\alpha), & l\varepsilon_2(\alpha), & \dots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}e-1}(\alpha) \\ l\varepsilon_1(\alpha^g), & l\varepsilon_2(\alpha^g), & \dots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}e-1}(\alpha^g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l\varepsilon_1(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-2}}), & l\varepsilon_2(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-2}}), & \dots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}e-1}(\alpha^{g^{\frac{1}{2}e-2}}) \end{array}$$

und $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$, ... $\varepsilon_{\frac{1}{2}e-1}(\alpha)$ ist ein System von Fundamental-Einheiten, welche aus den $\frac{1}{2}e$ Perioden von je $2f$ Gliedern gebildet sind, wobei endlich P folgendes Product bezeichnet:

$$\begin{aligned} P &= \varphi(\beta)\varphi\beta^3)\varphi(\beta^5) \dots \varphi(\beta^{e-1}) \\ \varphi(\beta) &= A + A_1\beta + A_2\beta^2 + \dots + A_{e-1}\beta^{e-1} \\ A &= \frac{1}{\lambda}(1 + g_e + g_{2e} + \dots + A_{(f-1)e}) \\ A_1 &= \frac{1}{\lambda}(g_1 + g_{e+1} + g_{2e+1} + \dots + g_{(f-1)e+1}) \\ &\dots \\ A_{e-1} &= \frac{1}{\lambda}(g_{e-1} + g_{2e-1} + g_{3e-1} + \dots + g_{fe-1}). \end{aligned}$$

g_1, g_2, ... $g_{\lambda-2}$ bezeichnen, wie oben, die kleinsten positiven Reste, welche die Potenzen einer primitiven Wurzel g, g^2, g^3, ... $g^{\lambda-2}$ für den Modul λ geben, und β ist eine primitive Wurzel der Gleichung $\beta^e = 1$.

Ich füge noch einige Bemerkungen über die angegebenen Resultate hinzu. Die Anzahl H der nichtäquivalenten Classen aller aus den einfachen Wurzeln α, α^g, ... $\alpha^{g^{\lambda-2}}$ gebildeten complexen Zahlen und der idealen Factoren derselben, welche in der Formel (38.) gegeben ist, besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Factoren, nämlich dem Factor $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ und dem Factor $\frac{D}{\varDelta}$; welche beide für sich ganze Zahlen sind. Für den Factor $\frac{D}{\varDelta}$ folgt dies unmittelbar aus der Gleichung (39.), welche zeigt, dafs dasselbe $\frac{D}{\varDelta}$ für sich die Anzahl aller nichtäquivalenten Classen für die aus den zweigliedrigen Perioden zu bildenden idealen complexen Zahlen darstellt, also nothwendig eine ganze Zahl ist. Um in Beziehung auf den andern Factor des H in der Formel (38.) Dasselbe zu zeigen, verwandele ich die Factoren von der Form $\varphi(\beta^{2n-1})$, aus denen P zusammengesetzt ist, nämlich

$$\varphi(\beta^{2n-1}) = 1 + g_1\beta^{2n-1} + g_2\beta^{2(2n-1)} + \dots + g_{\lambda-2}\beta^{(\lambda-2)(2n-1)}$$

mit Hülfe der Gleichung $\beta^\mu = -1$ und $g_{k+\mu} = \lambda - g_k$ in die Form

$$\varphi(\beta^{2n-1}) = 2 - \lambda + (2g_1 - \lambda)\beta^{2n-1} + (2g_2 - \lambda)\beta^{2(2n-1)} + \dots$$
$$+ (2g_{\mu-1} - \lambda)\beta^{(\mu-1)(2n-1)},$$

in welchem Ausdrucke alle Coëfficienten der einzelnen Glieder ungerade Zahlen sind. Es kommt nun darauf an, wie viel mal μ den Factor 2 enthält. Setzt man deshalb $\mu = 2^r.\nu$, wo ν ungerade ist und r auch gleich Null sein kann, und addirt zu dem Ausdrucke des $\varphi(\beta^{2n-1})$ die Gleichung

$$1 - \beta^{2^r(2n-1)} + \beta^{2.2^r(2n-1)} - \dots + \beta^{(\nu-1)2^r(2n-1)} = 0,$$

so wie dieselbe Gleichung, multiplicirt mit β^{2n-1}, $\beta^{2(2n-1)}$, ... $\beta^{(2^r-1)(2n-1)}$, welche für jeden Werth des n Statt hat, mit alleiniger Ausnahme des Falles $2n-1 = \nu$: so werden alle Coëfficienten in $\varphi(\beta^{2n-1})$ zu graden Zahlen; also ist $\varphi(\beta^{2n-1})$, mit Ausnahme des Falles $2n-1 = \nu$, immer durch 2 theilbar, und das Product P, welches aus μ solchen Factoren besteht, ist theilbar durch $2^{\mu-1}$. Um weiter zu zeigen, dafs P auch durch $\lambda^{\mu-1}$ theilbar ist, multiplicire ich $\varphi(\beta^{2n-1})$

mit $g\beta^{2n-1}-1$, wo g eine primitive Wurzel und deshalb $g^{\lambda-1}-1$ durch λ und $g^{\mu}+1$ durch λ theilbar ist. Ich wähle auch, was immer angeht, die primitive Wurzel so, dafs $g^{\mu}+1$ den Factor λ nur *einmal* enthält. Es wird alsdann

$$(g\beta^{2n-1})\varphi(\beta^{2n-1}) = gg_{\lambda-2}-1+(gg_{\lambda-1}-g_1)\beta^{2n-1}+(gg_1-g_2)\beta^{2(2n-1)}+\ldots$$
$$+(gg_{\lambda-3}-g_{\lambda-2})\beta^{(\lambda-2)(2n-1)},$$

und es sind nun alle Coëfficienten dieses Ausdrucks durch λ theilbar; wie aus der Congruenz $g_k \equiv g^k$, mod. λ, sogleich erhellt. Setzt man nun in dem durch λ theilbaren Ausdrucke $(g\beta^{2n-1})\varphi(\beta^{2n-1})$ nach einander $n=1, 2, 3, \ldots \mu$ und bildet das Product, so erhält man $(g^{\mu}+1)\boldsymbol{P}$ theilbar durch λ^{μ}, und da $g^{\mu}+1$ den Factor λ nur einmal enthält, so mufs $\boldsymbol{P}$ den Factor $\lambda^{\mu-1}$ enthalten. Da wir nun bewiesen haben, dafs $\boldsymbol{P}$ durch $2^{\mu-1}$ und auch durch $\lambda^{\mu-1}$ theilbar ist, so ist wirklich $\frac{\boldsymbol{P}}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ eine ganze Zahl; wie behauptet wurde.

In Beziehung auf die Classenzahl der aus Perioden zu bildenden idealen complexen Zahlen tritt ein wesentlicher Unterschied auf, zwischen denen, bei welchen die Perioden eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Gliedern enthalten. Wenn nämlich die Perioden eine ungerade Anzahl von Gliedern enthalten, so besteht immer die Classen-Anzahl aus zwei solchen verschiedenen ganzzahligen Factoren, während in den Ausdrücken für die Classenzahl bei den aus Perioden von gerader Gliederzahl gebildeten idealen complexen Zahlen nur der eine dieser beiden Factoren auftritt.

Für den Fall, wo es nur zwei Perioden giebt, deren jede aus $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ Gliedern besteht, geben die Formeln (39. und 40.) die Anzahl der Classen für die quadratischen Formen, deren Determinante eine Primzahl gleich λ ist, und zwar die eine für die positive Determinante λ, die andere für dieselbe negative Determinante.

Eine sehr merkwürdige einfache Beziehung, in welcher die Classenzahlen der aus Perioden gebildeten idealen complexen Zahlen zur Classenzahl der aus den einfachen Wurzeln der Gleichung $\alpha^{\lambda}=1$ gebildeten steht, ist die, dafs jene immer aliquote genaue Theile von dieser sind, da, wo sie ihr nicht völlig gleich sind. Diese Eigenschaft würde sich aus den gefundenen Ausdrücken für die Classen-Anzahl allgemein nur sehr schwer entwickeln lassen:

sie kann aber mit Leichtigkeit unmittelbar aus der Definition der Äquivalenz der idealen complexen Zahlen hergeleitet werden; wobei man nur den einen Satz braucht, dafs die Classen-Anzahl stets eine endliche, bestimmte ist. Es mögen $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}$ e Perioden von je f Gliedern sein, wo $ef = \lambda - 1$ ist und ferner $\varphi(\eta), \varphi_1(\eta), \varphi_2(\eta), \ldots \varphi_{h-1}(\eta)$ die h nichtäquivalenten Classen der aus diesen Perioden gebildeten idealen complexen Zahlen repräsentiren, und zwar so, dafs $\varphi(\eta)$ eine beliebige solche complexe Zahl der ersten Classe, $\varphi_1(\eta)$ eine beliebige der zweiten Classe u. s. w. darstellt. Da nun die aus den Perioden gebildeten idealen complexen Zahlen alle in den aus den einfachen Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten mit einbegriffen sind, so müssen die durch $\varphi(\eta), \varphi_1(\eta), \ldots \varphi_{h-1}(\eta)$ repräsentirten Classen alle in den verschiedenen Classen dieser allgemeineren complexen Zahlen vorkommen, deren Anzahl gleich H sei. Es kann nun erstens der Fall eintreten, dafs aufser den h Classen, welche die aus Perioden gebildeten complexen idealen Zahlen geben, für die aus den einfachen Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten gar keine andern Classen Statt haben, dafs also $h = H$ ist. Wenn dies aber nicht der Fall ist, so sei $f(\alpha)$ eine ideale complexe Zahl, welche nicht in den h Classen vorkommt, in welchen $\varphi(\eta), \varphi_1(\eta), \ldots \varphi_{h-1}(\eta)$ vorkommen: dann gehören, wie leicht zu zeigen ist, $f(\alpha)\varphi(\eta), f(\alpha)\varphi_1(\eta), f(\alpha)\varphi_2(\eta), \ldots f(\alpha)\varphi_{h-1}(\eta)$ nur solchen Classen an, welche weder unter sich, noch mit den Classen, denen $\varphi(\eta), \varphi_1(\eta), \varphi_2(\eta), \ldots \varphi_{h-1}(\eta)$ angehören, äquivalent sind. Wäre nämlich zunächst $f(\alpha)\varphi_r(\eta)$ äquivalent $f(\alpha)\varphi_s(\eta)$, so multiplicire ich beide mit demselben Multiplicator $F(\alpha)$, welcher bewirkt, dafs $F(\alpha)f(\alpha)$ eine ***wirkliche*** complexe Zahl ist; woraus dann folgen würde, dafs $\varphi_r(\eta)$ äquivalent $\varphi_s(\eta)$ sein müfste; gegen die Voraussetzung. Wäre ferner $f(\alpha)\varphi_r(\eta)$ äquivalent $\varphi_s(\eta)$, so multiplicire ich beide mit einem solchen Multiplicator $\Phi_r(\eta)$, welcher $\Phi_r(\eta)\varphi_r(\eta)$ zu einer wirklichen complexen Zahl macht; woraus folgen würde, dafs $f(\alpha)$ äquivalent $\Phi_r(\eta)\varphi_r(\eta)$ sei, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung ist, weil $f(\alpha)$, wenn es einer aus den Perioden gebildeten idealen complexen Zahl äquivalent wäre, schon in den ersten h Classen, welche durch $\varphi(\eta), \varphi_1(\eta), \ldots \varphi_{h-1}(\eta)$ repräsentirt sind, enthalten sein müfste. Eine einzige, nicht in diesen h Classen enthaltene complexe ideale Zahl macht also, dafs eine neue Gruppe von h Classen hinzukommt. Eben so macht eine einzige nicht in diesen $2h$ Classen enthaltene ideale complexe Zahl, dafs eine ganze dritte Gruppe von h Classen, die weder unter sich, noch mit den vorigen äquivalent sind, hinzukommt: dafs also $3h$ Classen existiren; und so geht dies weiter, bis wirklich alle H Classen erschöpft sind, welche sich, wie hieraus zu ersehen ist, nur durch ein genaues Vielfaches von h erschöpfen lassen. Es ist also immer H ein Vielfaches von h, oder h ein genau aliquoter Theil von H; was zu beweisen war. Eben so wird bewiesen, dafs wenn f' ein Vielfaches von f ist, und zugleich ein Theiler von $\lambda-1$, die Classen-Anzahl der aus Perioden von je f' Gliedern gebildeten idealen complexen Zahlen immer ein genau aliquoter Theil von der Classen-Anzahl für diejenigen ist, welche aus Perioden von je f Gliedern gebildet sind.

Breslau, den 16ten Juni 1849.