Springer

Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie
Author(s): E. Scholz
Source: *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 27, No. 3 (1982), pp. 213-232
Published by: Springer
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/41133672
Accessed: 27/09/2013 17:29

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at
http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

Springer is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Archive for History of Exact Sciences.*

http://www.jstor.org

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie

E. SCHOLZ

Vorgelegt von C. J. SCRIBA

Inhalt

Einleitung 213
1. Frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff 214
2. Weitere Arbeit an Mannigfaltigkeiten bis 1854 216
3. Bemerkungen zu den Grundlagen der Geometrie im Nachlaß 216
4. Die „einfachen" Hypothesen des Habilitationsvortrages im Lichte des Nachlaßdokuments 219
Anhang
1 RIEMANNS frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff 222
2 Fragment aus der Analysis Situs 225
3 Beziehungen zwischen den frühen Notizen zu Mannigfaltigkeiten und dem Analysis-Situs-Fragment 227
4 Nachlaßnotiz zu Mannigfaltigkeiten und den Grundlagen der Geometrie . . . 228
Literatur 230

Einleitung

BERNHARD RIEMANN schlug 1854 in seinem Habilitationsvortrag die Mannigfaltigkeit als neuen Grundbegriff der Mathematik vor, um insbesondere einen neuen Zugang zur Klärung der Grundlagenfragen der Geometrie zu ermöglichen [19]. Auch ist aus dem 1876 posthum publizierten Fragment zur Analysis Situs [21] bekannt, daß RIEMANN die Topologie von Mannigfaltigkeiten zu studieren begann. Unklar war bisher jedoch, in welchem Zeitraum dieses Fragment entstand, ob RIEMANN es insbesondere schon um 1854 herum oder etwa erst in einer späteren Phase schrieb. Darüberhinaus war bislang offen, ob RIEMANN einen Zusammenhang zwischen seinen Forschungen zu den Grundlagen der Geometrie und der nichteuklidischen Geometrie von BOLYAI und LOBACHEVSKII sah oder ob er diese Arbeiten eventuell nicht einmal kannte.

Bisher unpublizierte Dokumente im Göttinger RIEMANN-Nachlaß (Mappe 16) enthalten Informationen zu diesem Fragekomplex. Sie gliedern sich in drei

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

Gruppen:

I Frühe Notizen zur Einführung und Erklärung des Mannigfaltigkeitsbegriffs (R 13^{r-v}, 14^{r-v}, 38^{r}, 48^{r-v})[1],

II Originalschriften des von H. WEBER veröffentlichten Fragments zur Analysis Situs [21] (R 44^{r}, $46^{r-v}/47^{r}$, 49^{r-v}),

III Notiz zur Klärung der Grundlagenfragen der Geometrie mit Hilfe des Mannigfaltigkeitskonzeptes (R 39, 40^{r-v}).

Eine Auswertung dieser Dokumente erlaubt es, ein Bild davon zu gewinnen, wie RIEMANN Anfang der 1850er Jahre über Mannigfaltigkeiten nachgedacht hat (§ 1, Anhang 1), sowie die Entstehung des Analysis-Situs-Fragments zu datieren (§ 2, Anhang 2c). Auch läßt sich genauer als bisher klären, in welcher Beziehung RIEMANNS Ideen über die Grundlagen der Geometrie zur zeitgenössischen geometrischen Grundlagenforschung standen (§§ 3, 4, Anhang 4). Das zugrunde liegende Nachlaßmaterial wird im Anhang ausführlich dokumentiert.

1. Frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff

Die in Anhang 1 dokumentierten frühen Notizen zu Mannigfaltigkeiten sind in einer konkreteren Sprache formuliert als der Habilitationsvortrag von 1854. Sie sind mit Sicherheit früher, wahrscheinlich im Zeitraum 1852/53 (± 1), entstanden. Während RIEMANN im Habilitationsvortrag ziemlich vage von einem „allgemeinen Begriff" ausging, der „verschiedene Bestimmungsweisen" zuläßt ([19], p. 273), sprach er in den Nachlaßnotizen stets von einem „stetig veränderlichen Ding/Gegenstand", dessen „Bestimmungsweisen" die Mannigfaltigkeit bilden (R 13^{r}, 14^{r}, 38^{r}, Anhang 1; R 48^{v}, Anhang 3a).

Eine Mannigfaltigkeit war für RIEMANN demnach zunächst ein Konzept zur mathematischen Erfassung des Zustandsraumes eines (materiellen oder ideellen) Dinges. Diese Idee korrespondierte der herbartschen Auffassung sehr eng, daß die Merkmale der Dinge als in „qualitativ verschiedenen Continuen" liegend aufzufassen wären ([6], p. 193). Sie baute aber nicht primär auf die Anregung durch HERBART auf, sondern stärker auf die in der ersten Hälfte des 19ten Jahrhunderts breiter werdende Tendenz zur Geometrisierung analytisch/algebraischer Objekte innerhalb der Mathematik [24]. Wie später in seinem Habilitationsvortrag betonte RIEMANN auch schon hier, daß im allgemeinen keine Identifizierung der Mannigfaltigkeit mit reellen Intervallen möglich ist, und unterschied sprachlich zwischen „Größe" und „Zahl":

„Es wird hier aber durchaus nicht vorausgesetzt, dass es möglich sei, eine bestimmte Mannigfaltigkeit gleichsam als Maßstab für andere fortzutragen. Man hat sich daher vor der sonst geläufigen Vorstellung zu hüten, sich eine ver-

[1] „*R n*" bezeichnet im folgenden stets Blatt *n* der Mappe 16 des RIEMANN Nachlasses (Handschriftenabteilung der Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen), „*R n/n* + 1" kennzeichnet entsprechend einen durchgehenden doppelblättrigen Bogen dieser Mappe.

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

änderliche Grösse durch eine veränderliche Zahl in eine feste Einheit ausgedrückt zu denken; es kann ferner eine Grösse einer Grösse nur insofern gleich sein, als sie mit ihr identisch ist und nur insofern kleiner, als sie ein Theil derselben ist" (R 14^r, Anhang 1 b).

Einen breiten Raum widmete RIEMANN in den Notizen der Diskussion eindimensionaler Mannigfaltigkeiten, die er im Habilitationsvortrag nur im Vorbeigehen streifte ([19], p. 275). Dabei erklärte er Eindimensionalität dadurch, daß ein Übergang zwischen zwei Bestimmungsweisen/Zuständen des veränderlichen Dings (und damit zwischen zwei Punkten der Mannigfaltigkeit) „nur auf zweierlei Weise, vorwärts oder rückwärts" stattfinden könne (R 14^r; ähnlich in R 13^r, 38^r, Anhang 1; R 48^{r-v}, Anhang 3)[2]. Erst nachdem das klargestellt war, führte er Parametrisierungen ein, die ihm eine Bezeichnung der Punkte der eindimensionalen Mannigfaltigkeit durch reelle Zahlen—keine Identifizierung—möglich machte (R 14^r, Anhang 1 b).

Er unterschied vier (topologische) Typen eindimensionaler Mannigfaltigkeiten:

- „beiderseits begrenzt" (vom Typ des abgeschlossenen Intervalls),
- „auf einer Seite begrenzt, auf einer unendlich" (halboffenes Intervall),
- „beidseitig unendlich" (offenes Intervall),
- „in sich zurücklaufend" (Kreislinie; R 48^r, Anhang 3a).

An andere Stelle traf er eine Unterscheidung zwischen „endlichen" bzw. „unendlichen" (nicht nur eindimensionalen) Mannigfaltigkeiten:

„Eine unendliche Mannigfaltigkeit würde er eine solche sein, von der man sich stets nur einen Theil vorstellen könnte, in dem, wie lange man sich auch neue Theile hinzudächte, doch nie die Gesammtheit erschöpft würde; wir beschränken uns aber in der Folge stets auf endliche Mannigfaltigkeiten" (R 14^r, Anhang 1 b).

Unter einem Teil der Mannigfaltigkeit M, „den man sich vorstellen kann", darf man wohl eine gleichdimensionale Untermannigfaltigkeit U verstehen, die durch eine offene und beschränkte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ (oder allgemein $\mathbb{R}^n$) darstellbar ist. RIEMANNS Unterscheidung von „endlich/unendlich" war also eine frühe, intuitive Formulierung, die in ausgearbeiteter, moderner Sprache der Kompaktheit/Nichtkompaktheit einer Mannigfaltigkeit entspricht[3]. Bei Beschränkung auf die „endlichen" (kompakten) Mannigfaltigkeiten blieben RIEMANN im Eindimensionalen natürlich dann nur die Typen des abgeschlossenen Intervalls und der Kreislinie zu unterscheiden (R 14^r).

---

[2] Auch in dieser Hinsicht gibt es eine Parallele zu HERBART, der „eindimensionale Continuen" (nicht nur im engeren geometrischen Sinne) ganz entsprechend erklärt hatte ([7], p. 102; vgl. auch [24], Anm. 12).

[3] Sie unterscheidet sich insofern von der im Habilitationsvortrag unter expliziter Verwendung der Metrik diskutierten Bestimmung von „Unendlichkeit/Endlichkeit" einer Mannigfaltigkeit ([19], p. 284).

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

2. Weitere Arbeit an Mannigfaltigkeiten bis 1854

Die Betonung des n-dimensionalen Standpunktes in dem von Weber edierten Analysis-Situs-Fragment [21] könnte zur Annahme Anlaß geben, daß dieses erst nach der im Habilitationsvortrag ausgearbeiteten Fassung des allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriffes [19] entstanden ist. Darüberhinaus liegt zunächst die Vermutung nahe, daß das Fragment möglicherweise um 1857 herum entstand; es beginnt nämlich mit einer Charakterisierung der Zusammenhangszahlen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mittels eines bordanzhomologischen Ansatzes, der eine von RIEMANN erst 1857 für den zweidimensionalen Fall publizierte Methode [20] verallgemeinerte. Vorher [18] hatte RIEMANN lediglich seine andere Methode veröffentlicht, die mit Zerschneidungen operierte (vgl. [17], pp. 59ff; [23], pp. 51ff). Aus den in Mappe 16 des Nachlasses liegenden Originalmanuskripten des Fragments geht jedoch hervor, daß dieses viel eher geschrieben wurde.

Das aus drei Teilen bestehende Fragment entstand offenbar schon vor dem Habilitationsvortrag im Zeitraum 1852/53 (± 1), etwa gleichzeitig mit den frühen Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff. Das geht aus drei verschiedenen, sich gegenseitig abstützenden Datierungshinweisen hervor (frühe Notizen zur Erklärung von Mannigfaltigkeiten auf demselben Blatt wie ein Teil des Fragments, ebenso eine Rechnung zu trigonometrischen Reihen und eine datierte Todesnachricht aus dem Jahre 1852; vgl. Anhang 2c, 3a, 3b).

Eine weitere Notiz zu den Grundlagen der Geometrie (R 40^{r-v}), 39, die im folgenden Paragraphen genauer besprochen wird, geht auf die Möglichkeit ein, die Grundlagen der Geometrie unter Verwendung von Mannigfaltigkeiten analytisch zu untersuchen. Gleich am Anfang der Notiz ist vom allgemeinen Begriff einer Mannigfaltigkeit ohne weitere Erklärung die Rede, als könnte dieser als entwickelt vorausgesetzt werden. RIEMANN wird daher den Begriff in seinem Verständnis schon geklärt haben, als er R 40^{r-v} schrieb. Andererseits ist die Vorgehensweise viel grober als im Habilitationsvortrag (vgl. § 3). Die Nachlaßnotiz zu den Grundlagen der Geometrie ist demnach zwischen den frühen Erläuterungen zum Mannigfaltigkeitsbegriff—oder gleichzeitig zu ihnen—und dem Habilitationsvortrag entstanden.

Damit ergibt sich für RIEMANNS Arbeiten an Mannigfaltigkeiten zwischen 1851 und 1854 etwa folgende zeitliche Anordnung:

1850/51	Arbeit an der Dissertation [18],	
1852/53 (± 1)	darauf aufbauend, gleichzeitig oder etwas später:	
	Fragment zur Analysis Situs [21]	Notiz zu den Grundlagen der Geometrie (R 40^{r-v}, 39)
1854	Habilitationsvortrag [19].	

Dies war das zeitliche und sachliche Rahmen, in dem sich auch RIEMANNS Auffassungen von den Grundlagen der Geometrie herausbildeten.

3. Bemerkungen zu den Grundlagen der Geometrie im Nachlaß

RIEMANN eröffnete seinen bekannten Habilitationsvortrag mit einer Kritik am, wie er sagte, lediglich nominellen Charakter der Definitionen und Axiome

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

der Geometrie. Er griff damit ein Thema auf, das schon vorher von der „alten" Grundlagenkritik diskutiert worden war.

Als „alte" Grundlagenkritik soll dabei im folgenden diejenige bezeichnet werden, die den erkannten Mangel in der Begründung der Grundbegriffe und Axiome der euklidischen Geometrie zu beheben versuchte, ohne deren logische und erkenntnistheoretische Struktur grundlegend in Frage zu stellen. Insbesondere äußerte sich das ja im Versuch, das 5. Postulat EUKLIDS als mathematisch notwendig zu erweisen (KÄSTNER 1758, LEGENDRE 1794–1823, u.a.)[4].

Die damals „neue" Grundlagenforschung der Geometrie, die seit den 1820er Jahren entstanden war, zeichnete sich dagegen dadurch aus, daß sie die euklidische Struktur nicht mehr als mathematisch notwendig ansah, sondern stattdessen durch eine systematische Erforschung der Trigonometrie einer eventuell denkbaren „antieuklidischen" Geometrie durch Auswertung der Eigenschaften der hyperbolisch-trigonometrischen Funktionen die Möglichkeit anderer Grundannahmen immer deutlicher herausarbeitete. So erwies sie schließlich die „Hypothese des spitzen Winkels" (für die Winkelsumme im Dreieck) als mathematisch ebenso gut denkbar wie die euklidische „Hypothese des rechten Winkels" (im Dreieck), die sich als äquivalent zum Parallelenpostulat erwiesen hatte (GAUSS, TAURINUS, SCHWEIKART, BOLYAI, LOBACHEVSKII; vgl. [5]).

RIEMANN verwies 1854 namentlich nur auf einen Vertreter der alten Grundlagenkritik (LEGENDRE), ging aber in seiner Fragestellung und in seinem Lösungsansatz weit darüber hinaus. Es ist daher durchaus fraglich, ob RIEMANN diese Beziehung seiner Auffassung zur neueren Grundlagenforschung im Auge hatte, oder ob sie der Logik verschiedener Forschungsprogramme entsprang, die sich erst nach RIEMANN, mit BELTRAMI [1], miteinander verbanden[5]. Diese Frage läßt sich m.E. durch eine Auswertung der Nachlaßnotiz zu den Grundlagen der Geometrie (R 40^{r-v}, 39, Anhang 4) weitgehend klären.

RIEMANN führte auf Blatt R 40^{r-v} am Beispiel einer durch zwei unabhängige Parameter bestimmten physikalischen Beobachtung (Temperatur, Gewicht *etc.*) eine Mannigfaltigkeit im Sinne der frühen Notizen (als „Zustandsraum", vgl. § 1) ein, die mathematisch gesehen global durch den $\mathbb{R}^2$ repräsentiert wird. Darin erklärte er in naheliegender Weise eine Gerade als Nullstellenmenge einer linearen Gleichung $ax + by + c = 0$ (R 40^r). Eine solche konstruktive Definition trug offensichtlich den Mangel des bloß „Nominellen" nicht mehr.

Aus einer solchen Definition wären aber, so fuhr RIEMANN fort, alle geometrischen Sätze über die Gerade abzuleiten, und entsprechend könne man für die räumliche Geometrie fortfahren:

---

[4] Zu KÄSTNER siehe [4] und zu LEGENDRE [5].

[5] In der mathematikhistorischen Literatur wird häufig angenommen, daß RIEMANN seine Arbeit in bewusste Beziehung zur „neuen" Grundlagenforschung setzte, indem er die Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung zur *Interpretation* der Geometrien der Hypothese des stumpfen, rechten bzw. spitzen Winkels heranzog (z.B. BONOLA in [3], pp. 138f). BONOLA bezeichnet sogar BELTRAMIS Arbeit [1] lediglich als „Spezialfall" von RIEMANNS Arbeiten. Jedoch findet sich in der Literatur ebenso die Ansicht, daß RIEMANN die neue Grundlagenforschung BOLYAIS und LOBACHEVSKIIS wohl nicht gekannt habe (z.B. [8], p. 889).

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

„Bei dieser Behandlungsweise der Geometrie oder der Lehre der Mannigfaltigkeiten dreier Dimensionen würden alle Axiome, welche bei der gewöhnlichen Behandlungsweise von der räumlichen Anschauung entlehnt werden, wie z. B. der Satz, dass durch zwei Punkte nur eine Gerade möglich ist, das erste Axiom des Euklid etc., wegfallen, und es würden nur noch diejenigen übrig bleiben, welche für Grössen im allgemeinen gelten, z. B. der Satz, dass die Ordnung der Summanden beliebig ist" (R 40^r, Anhang 4a).

RIEMANN schlug hier demnach die Betrachtung des Raumes vom Standpunkt der reellen affinen Geometrie vor; sein Ansatz war also noch viel elementarer als (später) im Habilitationsvertrag. Die Definition der Geraden, die hier global durch lineare Gleichungen erfolgen konnte, ersetzte er dort ja durch die lokal definierten geodätischen Linien einer differentialgeometrischen (riemannschen) Metrik auf der Mannigfaltigkeit. Beiden Ansätzen war jedoch die Idee gemeinsam, die Grundlagenfragen der Geometrie durch Verwendung von Mannigfaltigkeiten einer analytischen Klärung zugänglich zu machen.

Selbst wenn der zitierte Absatz wie das ganze Papier nur kursorisch darauf einging, wie eine Untersuchung der Grundlagen der Geometrie im Rahmen der Mannigfaltigkeitslehre stattfinden kann, so ist doch bemerkenswert, daß als Beispiel dafür, wie die euklidischen Axiome auf Sätze in Mannigfaltigkeiten zurückgeführt werden können, das „erste Axiom des EUKLID" angegeben wird, hingegen kein Wort zum Parallelenxaiom fällt. Das wird nicht daran gelegen haben, daß RIEMANN etwa die Bedeutung des Parallelenaxiom nicht kannte; vielmehr scheint der Grund darin zu liegen, daß sich RIEMANN um die Detailforschung in den mathematischen Grundlagen der Geometrie gar nicht so intensiv kümmerte, sondern sich mit dem prinzipiellen Gedanken begnügte, der leichter am 1. Axiom zu erläutern war.

Gerade in diesem Sinne fuhr er in der Tat fort:

„Wenn es aber auch interessant ist, die Möglichkeit dieser Behandlung der Geometrie einzusehen, *so würde doch die Ausführung derselben äusserst unfruchtbar sein; denn wir würden dadurch keine neuen Sätze finden können*, und das, was bei der Darstellung im Raume einfach und übersichtlich erscheint, würde dadurch nur verwickelt und schwierig werden. Man hat dadurch auch überall den entgegengesetzten Weg eingeschlagen und überall, wo man in der Geometrie (Mathematik? E. S.) auf Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen stößt, wie in der Lehre von den bestimmten Integralen der Theorie der imaginären Grössen nimmt man die räumliche Anschauung zu Hülfe. Es ist ja bekannt, wie man dadurch eine wahre Übersicht über den Gegenstand gewinnt und nur dadurch gerade die wesentlichen Punkte hervortreten "(R 40^r, Hervorhebung E. S.).

RIEMANN sprach also in aller Deutlichkeit aus, daß er an der mathematischen Grundlagenforschung der Geometrie lediglich sekundär interessiert war und begründete das schwache Interesse mit einer angeblichen Unfruchtbarkeit bezüglich der Entdeckung neuer Sätze. Dieses Argument traf allerdings nur auf die alte Grundlagenkritik zu, die mit neuen Definitionen und bestenfalls verbesserten

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

Methoden lediglich die Architektur der euklidischen Geometrie besser begründen wollte.

Auf die neue Grundlagenforschung traf dagegen das Verdikt der Unfruchtbarkeit ganz und gar nicht zu. Diese faßte schließlich ein gegenüber der traditionellen Geometrie neues Objekt ins Auge, den nichteuklidischen Raum, und führte so notwendig auch zu neuen Sätzen. Selbst da, wo gleiche Aussagen wie in der traditionellen Geometrie auftraten, hatten sie hier eine neue Bedeutung und etablierten den Bereich der „absoluten Geometrie" (BOLYAIS Bezeichnung). Beispiele für solche neuen Sätze ergaben sich etwa beim Studium der „Horosphäre" (Bezeichnung von LOBACHEVSKII), einer Fläche im Raum, auf der absolut die euklidische Geometrie gilt[6]. Sowohl BOLYAI ([2], § 11) als auch LOBACHEVSKII ([14], §§ 31ff) studierten diese neuen Beziehungen.

Hätte RIEMANN die Arbeit eines dieser Mathematiker gekannt, so wäre es ihm kaum möglich gewesen, die These der „Unfruchtbarkeit" der mathematisch-geometrischen Grundlagenforschung zu vertreten. *Wir können also davon ausgehen, daß er diese Arbeiten nicht kannte, als er die Überlegung von Blatt R 40 niederschrieb.*

Mindestens ebenso interessant wie diese „Unfruchtbarkeitsthese" ist aber die direkt daran anschließende Wende, die RIEMANN seinem Argument gab und die zeigt, worauf sich RIEMANNS mathematisches Interesse bei der Einführung des Mannigfaltigkeitsbegriffes hauptsächlich richtete: auf die Aufdeckung geometrischer Beziehungen in mathematischen Konstruktionen, die im traditionellen Sinne nicht der Geometrie angehörten—insbesondere im Bereich der komplexen Analysis. Diese Stellungnahme stimmte völlig mit dem Schwerpunkt seiner Forschungsarbeiten überein, in denen er ja die Topologie zweidimensionaler (orientierbarer, kompakter) Mannigfaltigkeiten in engster Beziehung zu den Fragestellungen der komplexen Funktionentheorie entwickelte (vgl. [23], § 2).

4. Die „einfachen" Hypothesen des Habilitationsvortrages im Lichte des Nachlaßdokumentes

Die Auswahl des Themas für den Habilitationsvortrag aus den drei vorgeschlagenen durch GAUSS muß für RIEMANN um so überraschender gewesen sein, als er selber offenbar ja dazu neigte, die mathematische Klärung der Grundlagen der Geometrie als „unfruchtbar" anzusehen. Aber er hatte sich in den Jahren 1852/53 auch viel mit mathematischer Physik beschäftigt und konnte so die geometrischen Grundlagenfragen unter dem Gesichtspunkt betrachten, wie die mathematischen Voraussetzungen verbessert werden könnten, den Raumbegriff der physikalischen Realität möglichst gut anzupassen.

Wenn er mit der Ausgangsfrage, ob die in der euklidischen Geometrie gewählten Definitionen und Axiome „möglich" und „notwendig" seien, von der Formulierung her zwar direkt an die Fragestellung der alten Grundlagenforschung

[6] Die Rolle der Geraden nehmen dabei die „Horozykel" ein, das sind Orthogonalkurven zu einer Schar asymptotischer Parallelen. Eine „Horosphäre" entsteht als Rotationsfläche eines Horozykels um eine Parallele der Schar (Näheres etwa in [5], pp. 100ff).

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

anschloß, so ging er doch in der Art, sie zu beantworten, weit darüber hinaus. Er faßte schon die Frage nach der „Notwendigkeit" der Axiome anders, als es etwa SACCHERI, KANT oder LEGENDRE getan hatten, nicht als Frage nämlich, ob die traditionelle Struktur mathematisch zwingend sei, sondern im Sinne der Adäquatheit gegenüber der physikalischen Realität. Er verstand somit Notwendigkeit in einem materialistischen Sinne. Die Suche nach anderen möglichen Verbindungen der Grundbegriffe, also anderen Axiomen, war von ihm ganz darauf ausgerichtet, die Notwendigkeit in seinem Sinne besser überprüfbar zu machen. Dafür spielte die Differentialgeometrie eine entscheidende Rolle.

RIEMANNS Diskussion der Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung stand nun in diesem Forschungskontext. Diese Mannigfaltigkeiten führten auf metrische Verhältnisse, die durch besonders einfache Systeme von Tatsachen zu bestätigen oder zu widerlegen waren. Sie gestatteten RIEMANN also, (prinzipiell) besonders einfach testbare geometrische Hypothesen vorzustellen, an denen er erläutern konnte, wie er sich die Anpassung des Raumbegriffs an die physikalische Realität dachte. *Das war vom Ansatz her ganz unabhängig von der neuen Grundlagenforschung* BOLYAIS *und* LOBACHEVSKIIS und etablierte gleichzeitig gewissermaßen eine „neueste" Forschungsrichtung (Anpassung des geometrischen Raumbegriffes an die physikalische Realität auf der Grundlage der Differentialgeometrie in Mannigfaltigkeiten).

Es bleibt allerdings noch die Frage, ob RIEMANN zwischen der Niederschrift der Passage von R 40 und seinem Habilitationsvortrag vielleicht doch Kenntnis von den Arbeiten des ungarischen oder des russischen Mathematikers bekommen hat.

In diese Richtung scheint zunächst eine Eintragung RIEMANNS in die Ausleihliste der Göttinger Universitätsbibliothek für das Crelle Journal, Band *17* (1837), vom 15. Februar 1854 zu deuten. In diesem Band ist nämlich ein Artikel LOBACHEVSKIIS zur nichteuklidischen Geometrie unter dem Titel „Géometrie imaginaire" [13] enthalten[7]. Es ist daher anzunehmen, daß dieser Artikel RIEMANN kurz vor seinem Habilitationsvortrag zu Augen gekommen ist. LOBACHEVSKII verwies darin jedoch bezüglich grundsätzlicher Ausführungen auf seinen (russischen) Artikel im Kasaner Boten aus den Jahren 1829/30 [10] und gab hier nur eine Ergänzung nicht vollständiger Beweise. Der Artikel enthielt dementsprechend lediglich eine Reihe von Kalkulationen der nichteuklidischen Geometrie ohne explizite Diskussion der begrifflichen Grundlagen. Ein nicht in den Gedankenpreis eingearbeiteter Leser konnte die prinzipielle Bedeutung des lobachevskiischen Forschungsprogramms diesem Artikel kaum entnehmen und wird diesen eher LAMBERTS Trigonometrie auf der „imaginären Sphäre" zugeordnet haben[8].

Wäre RIEMANN trotz allem durch die Lektüre dieses Artikels oder auf andere Weise auf die prinzipielle Bedeutung der Arbeiten LOBACHEVSKIIS oder BOLYAIS

[7] Die Kenntnis dieser Ausleihnotiz verdanke ich E. NEUENSCHWANDER, der zur Zeit an einer umfangreichen Studie zu RIEMANNS Biographie arbeitet (vgl. [16]) und der mir freundlicherweise diesen Hinweis gab.

[8] F. ENGEL, der Übersetzer und Herausgeber von [15], teilt die Einschätzung, daß dieser Artikel [11]—entgegen seiner eigentlichen Zielsetzung—keineswegs geeignet war, zur Verbreitung von LOBACHEVSKIIS Ideen im westlichen Ausland beizutragen (in [15], p. 397).

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

gestoßen, so hätte das seine in Blatt R 40 gegebene Bewertung der geometrischen Grundlagenforschung einschneidend verändern müssen[9]. Hätte er in kürzerer Zeit vor seinem Habilitationsvortrag etwas grundlegend Neues von einem der beiden gelernt, so wäre der alleinige Verweis auf Legendre nicht mehr verständlich. Da er aber auf die neue Grundlagenforschung in keinerlei Weise explizit verwies, können wir mit recht großer Sicherheit davon ausgehen, daß er diese Arbeiten auch 1854 nicht genauer kannte.

BELTRAMIS Interpretation der nichteuklidischen Geometrie im Rahmen der riemannschen Methoden [1] ist also als eine wirkliche Innovation anzusehen, nicht nur als Explizierung einer insgeheim schon von RIEMANN gesehenen und intendierten Beziehung (oder gar als „Spezialfall" der riemannschen Arbeiten, wie BONOLA annimmt).

Der Inhalt von Blatt R 40 des Nachlasses ist aber nicht allein deswegen von Interesse, weil er diese Einschätzung bestätigt, die man ja immerhin mit einiger Plausibilität auch ohne dessen Kenntnis vertreten konnte. RIEMANNS Bewertung der „Unfruchtbarkeit" der Grundlagenuntersuchungen der Geometrie wirft auch in anderer Hinsicht ein Licht auf den Wandel der Geometrie im vergangenen Jahrhundert, selbst wenn sie schon zur Zeit ihrer Formulierung durch die damals neue Grundlagenforschung—die RIEMANN offenbar nicht kannte—praktisch widerlegt war. Seine These war ja nur die Kehrseite davon, daß RIEMANN der Erforschung neuer geometrischer Beziehungen in bisher nicht als geometrisch angesehenen Objekten einen so hohen Stellenwert beimaß.

Damit verwies sie gerade in ihrer Überpointierung auf einen Zug des Wandels der Geometrie des 19. Jahrhunderts, der an Wichtigkeit in keinerlei Weise hinter den Veränderungen der Grundlagenauffassung zurücksteht: die Aufdeckung geometrischer Beziehungen in Analysis und Algebra. Die Entdeckung und Ausarbeitung dieser Beziehungen führten zu einer ungeahnten Erweiterung des Gegenstandes der Geometrie und zur Herausbildung neuer Methoden und Grundbegriffe. RIEMANNS eigene Arbeiten trugen bekanntlich nicht unwesentlich zu dieser Entwicklung bei.

Anhang

Bei der folgenden Wiedergabe der Nachlaßnotizen RIEMANNS wurde in Rechtschreibung und Grammatik Originaltreue angestrebt. Wegen der schlechten Lesbarkeit der Originale sind jedoch kleine Abweichungen nicht gänzlich auszuschließen.

Änderungen gegenüber dem Original wurden der besseren Lesbarkeit wegen in folgenden Punkten vorgenommen:

---

[9] In der Ausleihliste der Göttinger Universitätsbibliothek gibt es in der ersten Hälfte der 1850er Jahre keine Eintragung RIEMANNS oder eines anderen Mathematikers über die Ausleihe des Buches von LOBACHEVSKII [14] oder von BOLYAI [2]. Das kann man als weiteres, abstützendes, wenn auch nicht sehr starkes Indiz dafür nehmen, daß RIEMANN den Gedankengang der „neuen" Grundlagenforschung 1854 nicht kannte.

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

- Ausschreibung offensichtlicher Abkürzungen, wie etwa „die Lehre von d.(en) M.(annigfaltigkeiten) von mehr D.(imensionen)" (R 40^{r}), „Ei.(ne) Ma.(nnigfaltigkeit) v.(on) 4 D.(imensionen)" (R 40^{v}), „im J.(ahre) Dei 1816" (R 47^{v}) *etc*,
- stärkere Untergliederung in Absätze als im Original bei Dokument R 40^{r-v} (Anhang 4a): die Trennungen zwischen den Absätzen 2/3, 6/7 und 8/9 von Anhang 4a wurden zusätzlich eingefügt.

Dagegen wurden die Untergliederung der Dokumente von Anhang 1 (einschließlich der Paragrapheneinteilung in 1b) und sämtliche Hervorhebungen vom Original übernommen.

Anhang 1: Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitskonzept

a) Blatt R 13^{r-v} (Mappe 16). Wenn von einer Bestimmungsweise eines veränderlichen Gegenstandes zu jeder anderen ein stetiger Übergang möglich ist, so bilden sämmtliche Bestimmungsweisen (Wenn unter einer Menge von verschiedenen Bestimmungsweisen eines veränderlichen Gegenstandes von jeder zu jeder anderen ein stetiger Übergang möglich ist, so bildet die Gesammtheit dieser)[10] eine stetig ausgedehnte Mannigfaltigkeit; jede einzelne heisst ein Punkt dieser Mannigfaltigkeit.

Eine stetig ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist eine Grösse aber nicht messbar und darf daher nicht als eine benannte veränderliche Zahl dargestellt werden. (Ein veränderliches Stück einer Mannigfaltigkeit ist daher eine veränderliche Grösse deren Werthe nicht benannte Zahlen sind.)[10]

Mannigfaltigkeiten von Einer Dimension (endlich und unendlich)

Wenn ein veränderlicher Gegenstand auf bestimmte Art von einer Bestimmungsweise stetig zu einer anderen übergeht, so ist unter den durchlaufenen Bestimmungsweisen von einer nur auf zwei Arten, vorwärts oder rückwärts ein stetiger Fortgang möglich.

Eine solche Mannigfaltigkeit, in welcher von jeder Bestimmungsweise nur auf zwei Arten ein stetiger Fortgang möglich ist, heisst eine Mannigfaltigkeit von Einer Dimension.

Jede endliche, zusammenhängende, d.h. aus einem Stück bestehende, Mannigfaltigkeit von Einer Dimension ist entweder beiderseits begrenzt oder in sich zurücklaufend.

Die Punkte einer Mannigfaltigkeit von Einer Dimension können unterschieden werden durch die verschiedenen Werthe einer veränderlichen Grösse innerhalb eines Stücks dieser Mannigfaltigkeit von einem bestimmten Anfangspunkt an gerechnet.

Legt man einem Gegenstand eine Veränderlichkeit von Einer Dimension bei, so bilden die Bestimmungsweisen desselben eine Mannigfaltigkeit von Einer Dimension; legt man nun dieser Mannigfaltigkeit von einer Dimension wieder eine

[10] Die alternative Formulierung steht im Original auf der rechten, sonst unbeschriebenen Hälfte des Blattes.

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

Veränderlichkeit von einer Dimension bei, so bilden sämmtliche (nimmt man nun an, daß diese Mannigfaltigkeit wieder auf bestimmte Art stetig in eine andere übergehe, so bilden sämmtliche)[10] so erhaltenen Bestimmungsweisen den Gegenstand einer Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen. Einem Gegenstand eine Veränderlichkeit von einer Dimension beilegen, heisst annehmen, dass er auf bestimmte Art von einer Bestimmungsweise in eine andere übergehe. Unterscheidet man die verschiedenen Punkte der Mannigfaltigkeit von Einer Dimension durch die verschiedenen Werthe einer Veränderlichen ξ und die verschiedenen Bestimmungsweisen dieser Mannigfaltigkeit durch die Werthe einer anderen Veränderlichen η, so wird jeder Punkt der Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen einer und nur einer Werthekombination von ξ und η entsprechen.

Auf ähnliche Art erhält man eine Mannigfaltigkeit von 3 Dimensionen, wenn man annimmt, dass eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen auf bestimmte Art sich verändert (d.h. so, dass jeder Punkt in einen bestimmten anderen Punkt übergeht), und unterscheidet man die Punkte der Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen durch die Werthe der Veränderlichen ξ, η und die verschiedenen Bestimmungsweisen dieser Mannigfaltigkeit durch die Werthe einer Veränderlichen ζ, so werden die Punkte der Mannigfaltigkeit von 3 Dimensionen durch Werthekombinationen von ξ, η, ζ unterschieden werden können.

[13^{v}] Stetig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten. Sie sind Grössen Sie sind messbar (der Inhalt), wenn je zwei verschiedene Theile vergleichbar sind.

Mannigfaltigkeiten von Einer Dimension.

Wenn man annimmt, dass eine Mannigfaltigkeit von $n - 1$ Dimensionen auf bestimmte Art sich ändere d.h. so, dass jeder Punkt derselben in einen bestimmten Punkt einer anderen übergehe, so bilden sämmtliche so erhaltene Bestimmungsweisen den Gegenstand einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen.

b) Blatt R 14^{r-v} (Mappe 16). Allgemeine Untersuchungen über stetige Veränderlichkeit

§ 1

Wir schreiben einem Dinge stetige Veränderlichkeit zu, wenn von einer Bestimmungsweise desselben zu einer anderen ein stetiger Übergang möglich ist. Sämmtliche Bestimmungsweisen (oder auch ein Theil dieser Bestimmungsweisen, zwischen denen ein stetiger Übergang möglich ist) bilden alsdann eine stetig ausgedehnte Mannigfaltigkeit, jede einzelne heisst ein Punkt dieser Mannigfaltigkeit.

Der Umfang der Veränderlichkeit eines Dinges kann beliebig begrenzt werden, indem von den Bestimmungsweisen desselben ein Theil ausgeschlossen wird. Jede stetig ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist also offenbar eine Grösse (einer Vermehrung oder Verminderung fähig). Es wird hier aber durchaus nicht vorausgesetzt, dass es möglich sei, eine bestimmte Mannigfaltigkeit gleichsam

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

als Massstab für andere fortzutragen. Man hat sich daher vor der sonst geläufigen Vorstellung zu hüten, sich eine veränderliche Grösse durch eine veränderliche Zahl in eine feste Einheit ausgedrückt zu denken; es kann ferner eine Grösse einer Grösse nur insofern gleich sein, als sie ein Theil derselben ist. Eine unendliche Mannigfaltigkeit würde eine solche sein, von der man sich stets nur einen Theil vorstellen könnte, in dem, wie lange man sich auch neue Theile hinzudächte, doch nie die Gesammtheit erschöpft würde; wir beschränken uns aber in der Folge stets auf endliche Mannigfaltigkeiten.

§ 2

Wenn das veränderliche Ding auf bestimmte Art aus einer Bestimmungsweise stetig in eine andere übergeht, so kann unter den durchlaufenen Bestimmungsweisen von einer offenbar nur auf zweierlei Weise (vorwärts oder rückwärts) ein stetiger Fortgang stattfinden.

Eine solche Mannigfaltigkeit, in welcher allgemein zu reden (d.h. von einzelnen Punkten abgesehen) nur auf zweierlei Weise ein stetiger Fortgang stattfinden kann, heisst einstreckig oder von einer Dimension (*διαστασις*)[11].

Wir setzen, wenn im folgenden von Einstrecken (Monogatasmata, Mannigfaltigkeiten von Einer Dimension) geredet wird, voraus, dass von keinem Punkte mehr als zwei Arten des Fortgangs stattfinden. Es ist dann jedes Stück eines Einstrecks entweder beidseitig begrenzt oder in sich zurücklaufend. Nimmt man in einem begrenzten Einstreckstücke einen festen Anfangspunkt an, und betrachtet den Theil des Einstrecks zwischen demselben und einem anderen Punkte als positiv oder negativ, je nachdem dieser auf der einen oder anderen Seite des Anfangspunktes liegt, so entspricht offenbar jeder bestimmten Lage dieses Punktes eine bestimmte Grösse jenes Theils und jeder stetigen Veränderung der einen eine stetige Veränderung der anderen. Die Punkte eines begrenzten Einstreckstücks können also vertreten werden durch die Werthe einer stetig veränderlichen Grösse, so dass jedem Punkte ein bestimmter Werth und umgekehrt jedem Werthe ein bestimmter Punkt und jeder stetigen Veränderung des einen eine stetige Veränderung des anderen entspricht.

[14^{v}] § 3

Legen wir einem veränderlichen Dinge a eine Veränderlichkeit von einer Dimension bei, so bilden die ihr zufolge möglichen Bestimmungsweisen eine Mannigfaltigkeit von einer Dimension. Legen wir nun dieser Mannigfaltigkeit von einer Dimension auf bestimmte Art eine Veränderlichkeit von einer Dimension bei, so bilden sämmtliche jetzt mögliche Bestimmungsweisen eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen. Die Veränderung einer Mannigfaltigkeit von einer Dimension ist dabei so zu verstehen (Unter der Veränderung einer Mannigfaltigkeit von einer Dimension kann dabei offenbar nur etwas Bestimmtes ver-

[11] „*διαστασις*“ (griechisch) etwa: Auseinandertreten, Auseinanderweichen.

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

standen werden, wenn angenommen wird),[10] dass jeder Punkt einer Mannigfaltigkeit in einen bestimmten Punkt der anderen übergehe.

c) Anmerkungen (E. S.). Die Notiz von Blatt R 13^{r-v} ist im Vergleich zu der von R 14^{r-v} weniger ausgearbeitet (vgl. etwa die Behandlung der Nichtreduzierbarkeit eindimensionaler Mannigfaltigkeiten auf reelle Intervalle, die Genauigkeit der Diskussion eindimensionaler Mannigfaltigkeiten, die Durchgliederung usw.). Sie ist demnach aller Wahrscheinlichkeit nach als erste von beiden geschrieben worden.

Über die hier dokumentierten beiden Blätter hinaus enthält R 38^r eine weitere Notiz, die anscheinend zwischen der von R 13^{r-v} und der von R 14^{r-v} geschrieben wurde. Eine detaillierte Dokumentation von R 38^r erübrigt sich, weil sie sich weitgehend mit den zitierten Notizen überschneidet. Sie enthält von R 14^{r-v}: § 1, Absatz 1; § 2, Absatz 1, 2, die ersten beiden Sätze von Absatz 3; § 3, Absatz 1; folgt ein Passus über Parametrisierung von ein- und zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten; § 2, letzter Satz (ohne die Verknüpfung „also"); § 2, vorletzter Satz.

Weitere frühe Notizen zur Einführung des Mannigfaltigkeitsbegriffs befinden sich auf R 48^{r-v}, dem ersten Blatt des Bogens R 48/49, auf dem sich auch ein Teil des Analysis-Situs-Fragments und Notizen über trigonometrische Reihen befinden. Daraus ergibt sich als Datierung für Riemanns Beschäftigung mit dem frühen Mannigfaltigkeitskonzept der Zeitraum 1852/53 (± 1) (vgl. dazu genauer Anhang 3).

Anhang 2: Fragment aus der Analysis Situs

a) Die Manuskripte zum Fragment. Das von Weber publizierte Fragment aus der Analysis Situs [21] besteht aus drei Teilen, die von Riemann auf getrennten Blättern niedergeschrieben, von Weber mit geringfügigen Auslassungen in einer provisorischen Reihenfolge handschriftlich kopiert und schließlich in einer abgeänderten Reihenfolge in Riemanns Werken [22] ediert wurden.

Teil A: Einführung der homotopen Äquivalenz von Wegen („Einstrecken") in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und (bordanzhomologische) Charakterisierung höherer Zusammenhangszahlen von M (kompakt, eventuell mit Rand).

Teil B: Änderung der Zusammenhangszahlen von M und Rand (M) durch Anbringen einfach zusammenhängender Querschnitte.

Teil C: Charakterisierung des Zusammenhangs einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit durch die Querschnitts-Methode.

Die zugehörigen Manuskripte sind an folgendem Ort in Mappe 16 des Riemann Nachlasses zu finden:

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

	RIEMANNS Original	WEBERS Abschrift	Publiziert in [21]
Teil A	R 46^{r-v}	R $42^{v}/43^{r}$	pp. 481–482, Z. 16
Teil B	R 44^{r}	R 43^{v} (letzter Absatz fehlt)	pp. 482, Z. 17–483, Z. 9
Teil C	R 49^{r-v}	R 43^{r-v}	pp. 481, Z. 10–482

WEBERS provisorische Anordnung in seinem Manuskript war also A–C–B. Sie folgte direkt im Anschluß an seine Kopie von RIEMANNS Bemerkungen zu Mannigfaltigkeiten in den Grundlagen der Geometrie (R 40^{r-v}, 39; siehe Anhang 4). Neben geringfügigen Auslassungen gegenüber den Originalen steht in seiner Handschrift zwischen C und B noch der Abschnitt (i) von R 48^{r} und Absatz (i) von R 48^{v} (vgl. Anhang 3a). Diese beiden Absätze stehen auch in RIEMANNS Original (neben anderen Bemerkungen) vor Teil C auf demselben Bogen R 48/49.

b) Webers Publizierung. Für die endgültige Publizierung trennte WEBER die Teile des Analysis-Situs-Fragments vom Rest (Grundlagen der Geometrie usw.) ab. Vermutlich war die inhaltliche Distanz der Notizen von R 40^{r-v}, 39 zu den Stücken des Fragments der Grund dafür, von deren Publizierung abzusehen. Für die zwischen C und B eingeschobenen Absätze gilt das jedoch nicht; der zweite Absatz stellt sogar andeutungsweise eine Beziehung zwischen den beiden (in Teil A bzw. Teil C eingeführten) Methoden zur Erklärung der Zusammenhangszahlen (nämlich für den einfachsten Fall: erste Zusammenhangszahl 0) her. Sie stellen aber keinen direkten Teil von C dar und schienen Weber offenbar isoliert nicht von größerem Interesse, so daß er sie bei der endgültigen Publizierung auch aussonderte.

Zur Herausgabe stellte WEBER die Reihenfolge der Teile gegenüber seiner Handschrift um zu A–B–C. Der logische Aufbau von B auf A ist offensichtlich, daher ist die Blockung A–B nur zu gerechtfertigt. Der Teil C ist hingegen logisch unabhängig von A und B; der Aufbau könnte daher genauso gut C–A–B lauten. Es sprechen sogar zwei Gründe für die Annahme, daß Teil C (R 49^{r-v}) vor Teil A (R 46^{r-v}) geschrieben wurde:

– Im zweidimensionalen Fall entwickelte Riemann die Querschnittsmethode vor der bordanzhomologischen (vgl. [23], Kap. 2); es lag für ihn wohl nahe, bei der Übertragung in n Dimensionen entsprechend vorzugehen.

– Die Charakterisierung der Zusammenhangszahlen mit der Bordanzmethode (Teil A) ist einfacher und klarer als die nach der Querschnittsmethode (Teil C), so daß sich die kompliziertere und weniger einsichtige Charakterisierung von Teil C erübrigt hätte, wenn Teil A vorher ausgearbeitet worden wäre.

c) Datierung. RIEMANNS Abschrift von Teil A des Analysis-Situs-Fragments befindet sich auf Blatt R 46^{r-v}, dem ersten eines Bogens, dessen zweites Blatt (R 47^{r-v}) auf der Rückseite eine handschriftliche Notiz Riemanns über den Tod eines J. C. C. MUCHOW aus Großgußborn (nahe RIEMANNS Heimatstadt Dannenberg) am 10. 5. 1852 enthält. Nach einer ersten Grobformulierung der Daten folgt eine sprachliche etwas ausgearbeitetere Fassung:

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

„Johann Jürgen Chr. F. Muchow, geb. zu Kietz im Preussischen im Jahre 1785 (Vater Ludwig Muchow, Mutter geborne Hoppe aus Tobringen) verheiratete sich im Jahre Dei 1816 mit Anne Marie Catharine Elisabeth Stahlbock, Tochter des Landwirths Joachim Hennig Stahlbock zu Grossgussborn, starb am 10. Mai 1852, nachdem er 4 Tage an der Brustkrankheit krank gelegen, betrauert von 7 Kindern, 3 Söhnen und 4 Töchtern, einer Schwiegertochter, zwei Enkeln, einer Schwester und sonstigen Verwandten" (R 47^{v}).

Es ist sehr wahrscheinlich, daß Teil A des Analysis-Situs-Fragments um das hier angegebene Datum herum, also im Jahre 1852, entstand. Dasselbe dürfte für Teil B gelten, der mit A in engem Zusammenhang steht.

Teil C steht auf einem Bogen (R 48/49), der mit hoher Sicherheit während der Arbeit an der Habilitationsschrift (1851–1853) entstanden ist (siehe Anhang 3b). Da vermutlich C vor A geschrieben wurde, ergibt sich aus den beiden Datierungshinweisen mit großer Sicherheit für alle drei Teile des Analysis-Situs-Fragments der Entstehungszeitraum 1852/53 (± 1).

Anhang 3: Beziehungen zwischen den frühen Notizen zum Mannigfaltigkeitskonzept und dem Analysis-Situs-Fragment

a) Inhalt von Bogen R 48/49. Blatt R 48 und R 49 bilden einen zusammenhängenden Bogen. R 48^{r} enthält zwei Notizen völlig unterschiedlichen Inhalts, (i) zu eindimensionalen Mannigfaltigkeiten, (ii) zu trigonometrischen Reihen:

(i) „Wir setzen, wenn im folgenden von Einstrecken (Mannigfaltigkeiten von Einer Dimension) geredet wird, voraus, dass von keinem Punkte mehr als zwei Arten des Fortgangs stattfinden. Es ist daher jedes Stück eines Einstrecks entweder auf beiden Seiten begrenzt oder auf einer Seite begrenzt, auf einer unendlich, oder beidseitig unendlich, oder endlich in sich zurücklaufend" (R 48^{r}, auch in Webers Handschrift R 43^{v}, siehe Anhang 2a).

(ii) „Die Reihen von Fourier sind bis jetzt Gegenstand der Studien (?) berühmter Mathematiker gemeinsam; eine erschöpfende Behandlung aller Fälle, in welcher die Reihe konvergiert, ist aber bis jetzt nicht gegeben" (R 48^{r}; es folgen nur bruchstückhaft lesbare Formeln mit trigonometrischen Summen).

Blatt R 48^{v} enthält eine Reihe teilweise abgebrochener Ansätze zur Diskussion von Mannigfaltigkeiten in engstem Zusammenhang mit den in Anhang 1 dokumentierten Notizen:

(i) „Zieht man im Inneren eines Raumes, der durch jede Querwand in getrennte Theile zerfällt, eine in sich zurücklaufende Linie *a*, so lässt sich stets im Innern des Raumes eine Fläche angeben, deren Begrenzung ganz durch *a* gebildet wird" (R 48^{v}, auch in Webers Handschrift R 43^{v}, siehe Anhang 2a).

(ii) Es folgen 10 Zeilen (Z. 5 bis Z. 14) mit abgebrochenen Formulierungen („Grenze – Gebiet ... Die einzelnen Bestimmungsweisen des Dinges Punkte dieser Mannigfaltigkeit zu nennen").

(iii) Schließlich folgen bis auf kleinste sprachliche Änderungen vier Sätze (so-

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

wie ein halber, abgebrochener), die in R 14^r wieder aufgenommen und ausformuliert worden sind (R 14^r: § 1 Satz 1, § 2 Satz 1, 2, 3; vgl. Anhang 1b).

Blatt R 49^{r-v} enthält das Original von Teil C des Analysis-Situs-Fragments. WEBER strich (ohne Sinnveränderung) bei seiner Edierung jedoch drei Sätze (die beiden ersten werden etwas später noch einmal genauer wiederholt). Sie stehen im Original direkt unter der Überschrift „Lehrsätze aus der Analysis Situs" und lauten:

„Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit von n Dimensionen A zerfällt durch jeden angetragenen Querschnitt in getrennte Stücke oder nicht. Erstere Eigenschaft bezeichnen wir durch a.

Ein Querschnitt eines n-Strecks A heisst eine das Innere desselben durchsetzende Mannigfaltigkeit von weniger (als n) Dimensionen, deren Begrenzung ganz in die Begrenzung des n-Strecks (von A) fällt" (R 49^r).

b) Anmerkungen. Der Bogen R 48/49 enthält also Notizen aus drei Teilgebieten:
- Zur Einführung des Mannigfaltigkeitsbegriffs (R 48^r (i), 48^v (i), (ii)),
- zur Analysis Situs (R 48^v (i), 49^{r-v} Teil C),
- zum Studium der trigonometrischen Reihen (R 48^r (ii)).

Die Notiz zu den trigonometrischen Reihen ist mit großer Wahrscheinlichkeit während der Arbeit an der Habilitationsschrift entstanden, also etwa 1852/53. Dies wirft auch Licht auf den vermutlichen Entstehungszeitraum der beiden anderen Passagen. Darüberhinaus geht der topologische Absatz (i) von Blatt R 48^v, der im einfachsten Fall eine Verbindung zwischen den beiden topologischen Methoden von Teil A und C des Analysis-Situs-Fragments herstellt, direkt zu den Passagen (ii) und (iii) mit Bemerkungen zur Einführung des Mannigfaltigkeitskonzepts über.

RIEMANN hat demnach die Ansätze zum Studium der Topologie in n Dimensionen schon zur selben Zeit entwickelt, als er seine Gedanken zur Fassung und Erklärung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit formulierte. Der Kombination verschiedener Notizen von Bogen R 48/49 nach zu schließen, hat RIEMANN also sowohl die in Anhang 1 veröffentlichten Dokumente, als auch die drei Teile des Analysis-Situs-Fragments im Zeitraum 1852/53 (± 1) geschrieben. Zu Teil A des Fragments gibt es einen weiteren Datierungshinweis, der sich damit deckt (vgl. Anhang 2c).

Anhang 4: Nachlaßnotiz zu Mannigfaltigkeiten und den Grundlagen der Geometrie

a) Blatt R 40^{r-v} von Mappe 16. Der Begriff einer Mannigfaltigkeit von mehreren Dimensionen besteht unabhängig von unseren Anschauungen im Raum. Der Raum, die Ebene, die Linie sind nur das anschaulichste Beispiel einer Mannigfaltigkeit dreier, zweier oder einer Dimension. Ohne die mindeste räumliche Anschauung zu haben, würden wir doch die ganze Geometrie entwickeln können. Ich will das an einem Beispiel erläutern:

Gesetzt, ich wollte ein Experiment oder eine Beobachtung machen und es

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

käme mir dabei nur darauf an, *einen* Zahlenwerth, etwa den Grad der Wärme, zu ermitteln. In diesem Fall würden alle möglichen Fälle des Resultats dargestellt werden durch die continuierliche Reihe aller Zahlenwerthe von $+\infty$ bis $-\infty$. Gesetzt aber, ich wollte zwei Zahlenwerthe bestimmen, ich wollte etwa eine Temperaturbestimmung und eine Gewichtsbestimmung machen, so wäre das Resultat bedingt durch zwei Grössen x und y. Ich werde hier die Gesammtheit aller Fälle erhalten, wenn ich sowohl x als auch y alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ gebe und jeden Werth von x mit jedem Werth von y kombiniere. Einen einzelnen Fall werde ich erhalten, wenn sowohl x als auch y einen ganz bestimmten Werth haben.

Ich kann nun aus der Gesammtheit der Fälle einen Complex von Fällen herausgreifen, ich kann z.B. die lineare Gleichung $ax + by + c = 0$ aufstellen und nun alle diejenigen Fälle zusammenfassen, wo x und y dieser Gleichung genügen; ich könnte diesen Complex von Fällen eine *Gerade* nennen. Aus dieser Definition der Geraden würde ich alle Sätze ableiten können, welche in der Geometrie über die Gerade stattfinden. Es ist klar, dass man auf diese Weise fortfahren könnte, ohne die mindeste räumliche Anschauung zu Hülfe zu nehmen.

Bei dieser Behandlungsweise der Geometrie oder der Lehre der Mannigfaltigkeiten dreier Dimensionen würden alle Axiome, welche bei der gewöhnlichen Behandlungsweise von der räumlichen Anschauung entlehnt werden, wie z.B. der Satz, dass durch zwei Punkte nur eine Gerade möglich ist, das erste Axiom des Euklid *etc.*, wegfallen, und es würden nur noch diejenigen übrig bleiben, welche für Grössen im allgemeinen gelten, z.B. der Satz, dass die Ordnung der Summanden beliebig ist.

Man findet nun leicht, dass man auf dieselbe Weise, wie man eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen erhalten, unabhängig von der Existenz der Ebene, auch zu Mannigfaltigkeiten von beliebig viel Dimensionen gelangen kann. Wir dürfen nur eine Beobachtung machen, wo es [Satz im Original abgebrochen, WEBERS Ergänzung in R 42^{r}: „... sich um die Bestimmung von mehreren Zahlengrössen handelt"; E. S.].

Wenn es aber auch interessant ist, die Möglichkeit dieser Behandlungsweise der Geometrie einzusehen, so würde doch die Ausführung derselben äusserst unfruchtbar sein, denn wir würden dadurch keine neuen Sätze finden können, und das, was bei der Darstellung im Raume einfach und übersichtlich erscheint, würde dadurch nur verwickelt und schwierig werden. Man hat daher auch überall den entgegengesetzten Weg eingeschlagen, und überall, wo man in der Geometrie [WEBER in R 42^{r}: „Mathematik"] auf Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen stößt, wie in der Lehre von den bestimmten Integralen der Theorie der imaginären Grössen nimmt man die räumliche Anschauung zu Hülfe. Es ist ja bekannt, wie man dadurch eine wahre Übersicht über den Gegenstand gewinnt und nur dadurch gerade die wesentlichen Punkte hervortreten.

Wenn wir aber auch, wie wir eben gesehen haben, alle Sätze über die Mannigfaltigkeiten von mehr als drei Dimensionen analytisch ableiten können, so würde es bei weitem vorzuziehen sein, wenn wir die Lehre von den Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen unmittelbar auf die Geometrie gründen könnten. Ich will dies nur für die Mannigfaltigkeiten von 4 Dimensionen aus[40^{v}]führen.

Eine Mannigfaltigkeit von 4 Dimensionen ist also hier etwas, was unendlich

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

viele Räume in sich enthält. Wir können aber immer nur das zugleich betrachten, was in demselben Raume liegt. Wenn ich nun im folgenden sage, zwei Gebilde liegen nicht in demselben Raum, so heisst das, ich kann sie nicht beide zugleich betrachten, ich kann mir von ihrer gegenseitigen Lage durchaus kein Bild machen, ich kann nur aus den Prämissen, die ich über sie mache, logische Schlüsse ziehen, und es ist ein wesentliches Erfordernis zum Verständnis des Folgenden, sich nur an diese logischen Schlüsse zu halten.

Ich habe vorhin bemerkt, dass es in der Geometrie eine Anzahl von Axiomen gibt, die sich bei der angedeuteten analytischen Behandlung aus der Definition einer Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen ableiten lassen. Ebenso gibt es nun auch hier einige einfache Sätze, die sich nur analytisch ableiten lassen, ich muss sie aber als Axiom hinstellen, und ich behalte mir vor, sie später analytisch zu beweisen. Diese Sätze sind:
[Abbruch des Manuskripts, E. S.]

b) Blatt R 39^{r} (ergänzende Notiz zu R 40^{v-r}). Wir wollen uns mit einem Räumlichen von vier Dimensionen beschäftigen. Es ist das ein stetiges Räumliches von einem grösseren Umfange als der ganze unendliche Raum. Freilich können wir mit unserer Anschauung nicht mehr umfassen als den ganzen unendlichen Raum, aber wir können uns nach einander in verschiedene Räume versetzen. Ich verstehe das so: Ich stelle mir zuerst den ganzen unendlichen Raum vor, nachher stelle ich mir wieder den ganzen unendlichen Raum vor, denke mir aber, dass alle Punkte, die ich jetzt anschaue, andere seien als die Punkte, die ich vorher anschaute [Rest des Blattes leer, E. S.].

c) Anmerkungen. Diese Notizen wurden von WEBER entziffert und neu niedergeschrieben (R 42/43). WEBERS Handschrift beginnt mit den hier unter a) und b) dokumentierten Passagen (R 40^{r-v}, 39^{r}),; direkt im Anschluß folgt der Text des von Weber veröffentlichten Fragments zur Analysis Situs (vgl. Anhang 3).

Die Passagen R 40^{r-v}, 39^{r} setzen den Begriff einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit als entwickelt voraus („Der Begriff einer Mannigfaltigkeit von mehreren Dimensionen besteht unabhängig von unseren Anschauungen im Raum ...“); sie entstanden daher wahrscheinlich gleichzeitig zu oder nach den frühen Notizen zur Einführung des Mannigfaltigkeitsbegriffs (Anhang 1), sicher aber vor der Ausarbeitung des Habilitationsvortrages [19]. Sie sind daher auf den Zeitraum 1852/53 zu datieren (vgl. § 2 dieses Artikels).

Literatur

1. BELTRAMI, E., Saggio di interpretazione della geometria non euclidea, Giorn. di Mat. **6** (1868), 284–312.
2. BOLYAI, J., Appendix, Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica, Erstveröffentlichung in:

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

BOLYAI, W., Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, ..., introducendi, Maros Vásárhelyini 1832, dtsch. Überstzg. in: STÄCKEL, P. (Hrsg.), Wolfgang und Johann Bolyai, Geometrische Untersuchungen, Leipzig 1913, 183–219

3. BONOLA, R., Non-euclidean geometry, a critical and historical study of its development, authorized English translation by H. S. Carslaw ..., London 1912, Reprint New York (Dover) 1955
4. FOLTA, J., Geometrical and algebraic axiomatics and the generalization of geometry, Actes 12-ème Congr. Int. d'Hist. Sci. Paris, t. **4**, Paris 1971, 59–65
5. GRAY, J. J., Ideas of space, Oxford 1979
6. HERBART, J. F., Psychologie als Wissenschaft, Zweiter analytischer Theil, Königsberg 1825, Sämmtliche Werke (Hrsg. HARTENSTEIN, G.) Bd. **6**, Leipzig 1850, Sämtliche Werke (Hrsg. KEHRBACH, K., FLÜGEL, O.) Bd. **6**, Langensalza 1892, Reprint Aalen 1964
7. HERBART, J. F., Psychologische Bemerkungen zur Tonlehre, Königsberger Archiv **1** (1812), Sämmtliche Werke (Hrs. HARTENSTEIN, G.) Bd. **7**, 1–27, Leipzig 1851, Sämtliche Werke (Hrsg. KEHRBACH, K., FLÜGEL, O.) Bd. **3**, 98–118, Langensalza 1888, Reprint Aalen 1964
8. KLINE, M., Mathematical thought from ancient to modern times, New York, 1972
9. LEGENDRE, A. M., Éléments de géométrie, Paris 1794
10. LOBACHEVSKII, N. I., (Über die Anfangsgründe der Geometrie; russisch), Kasaner Bote **25** (1829), 178–187, 228–241, **27** (1829), 227–243, **28** (1830), 251–283, 571–636; dtsch. Überstzg. in [15], 1–66
11. LOBACHEVSKII, N. I., (Imaginäre Geometrie; russisch), Kasaner gelehrte Schriften (1835) (russische Fassung des 1834/1835 beim Crelle Journal eingereichten Artikels [13])
12. LOBACHEVSKII, N. I., (Neue Anfangsgründe der Geometrie; russisch), Kasaner gelehrte Schriften (1835), H. 3, 3–48; (1836), H. 2, 3–98; H. 3, 3–50, (1837), H. 1, 3–97; dtsch. Überstzg. in [15], 67–236
13. LOBACHEVSKII, N. I., Géométrie imaginaire, Journ. f. reine u. angew. Mathematik **17** (1837), 295–320
14. LOBACHEVSKII, N. I., Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840
15. LOBACHEVSKII, N. I., Zwei geometrische Abhandlungen (Überstzg. u. Hrsg. ENGEL, F.), Leipzig 1898 (enthält [10], [12] und Kommentar von ENGEL)
16. NEUENSCHWANDER, E., Über die Wechselwirkung zwischen der französischen Schule, Riemann und Weierstraß. Eine Übersicht mit zwei Quellenstudien, Arch. Hist. Exact Sciences **24** (1981), 221–255
17. PONT, J. C., La topologie algébrique des origines à Poincaré, Paris 1974
18. RIEMANN, B., Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe (Inauguraldissertation 1851), in [22], 3–48
19. RIEMANN, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (Habilitationsvortrag 1854, Erstveröffentlichung Abhandlungen der Königl. Ges. d. Wiss. Göttingen **13** (1867)), in [22], 272–287
20. RIEMANN, B., Theorie der Abelschen Funktionen, Journal f. reine u. angew. Mathematik **54** (1857), in [22], 86–144
21. RIEMANN, B., Fragment aus der Analysis Situs, in [22], 479–482
22. RIEMANN, B., Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß (Hrsg. WEBER, H., DEDEKIND, R.), Leipzig 1876, 2. Auflage Leipzig 1892, Reprint Nendeln (Sändig) 1978 (einschließlich der Nachträge, Hrsg. NOETHER, M., WIRTINGER, W., New York 1902)

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

23. SCHOLZ, E., Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré, Boston 1980
24. SCHOLZ, E., Herbart's influence on Bernhard Riemann, erscheint in Historia Mathematica **9** (1982)

Quellen: Riemann-Nachlaß, Mappe 16, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Prinzenstr. 1, D-3400 Göttingen.

Dieser Artikel ist aus einem Vortragsmanuskript für den 16. Internationalen Kongreß für Wissenschaftsgeschichte, Bukarest 1981, hervorgegangen, an dem ich dank einer Unterstützung durch die DFG und die Gesamthochschule Wuppertal teilnehmen konnte.

Der Handschriftenabteilung der Göttinger Universitätsbibliothek möchte ich meinen Dank dafür aussprechen, daß sie mir den Zugang zu den Quellen ermöglicht hat und die Erlaubnis zum Zitieren und Dokumentieren erteilte.

Gesamthochschule Wuppertal
Fachbereich 7
D-5600 Wuppertal 1

(Eingegangen am 3. März 1982)

This content downloaded from 217.233.40.84 on Fri, 27 Sep 2013 17:29:44 PM
All use subject to JSTOR Terms and Conditions